Chapitre n°10 : Intégration – Exercices BAC

Exercice n°1 : Polynésie Septembre 2011 - 6 points 2
Exercice n°2 : La Réunion 2011 – 6 points 3
Exercice n°3 : Centres Etrangers 2011 – 6 points 4
Exercice n°4 : France 2011 – 7 points 5
Exercice n°5 : Asie 2011 – 5 points 7
Exercice n°6 : Pondichéry Avril 2010 : 6 points 8
Exercice n°7 : Liban 2010 : 5 points 9
Exercice n°8 : Polynésie 2010 : 5 points 9
Exercice n°9 : Asie 2010 : 7 points 10
Exercice n°10 : Réunion 2010 : 5 points 11
Exercice n°11 : Antilles-Guyane 2010 : 4 points 12
Exercice n°12 : France Septembre 2010 : 6 points 13
Exercice n°13 : Amérique du Sud Nov. 2010 : 5 points 14
Exercice n°14 : Nouvelle-Calédonie Nov. 2010 : 7 points 14

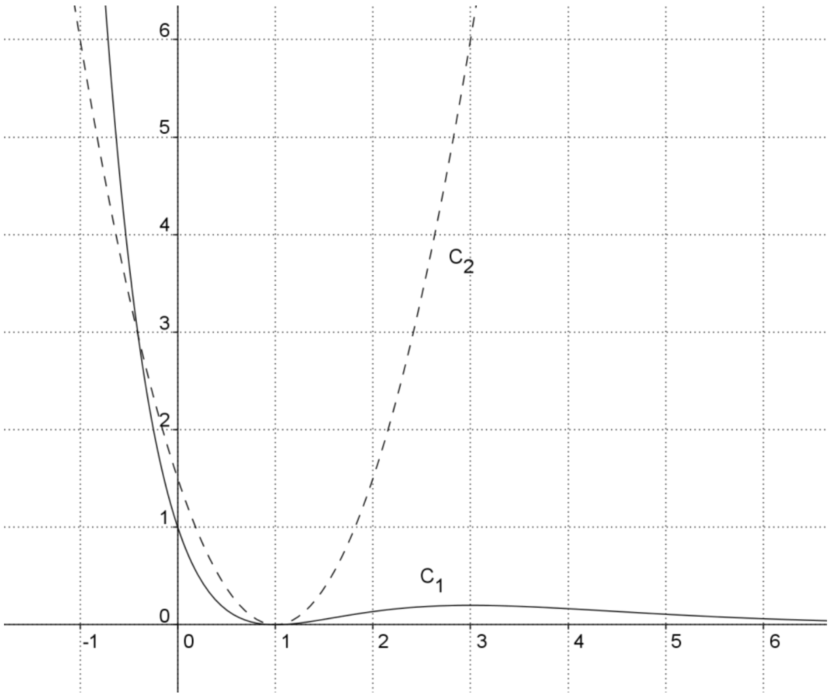
Exercice n°1 : Polynésie Septembre 2011 - 6 points

Partie A : Question de cours

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient u et v deux fonctions continues, dérivables sur I telles que les fonctions dérivées u' et v' soient continues sur I. Rappeler et démontrer la formule d'intégration par parties sur un intervalle $[a\,;b]$ de I.

Partie B : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(x-1)^2\,e^{-x}$ et $g(x)=\frac{3}{2}(x-1)^2$.

On note respectivement C_1 et C_2 les courbes représentatives de f de g dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Les courbes sont tracées ci-dessous.



1°)

(a) Déterminer les coordonnées des points communs à C_1 et C_2.

(b) Donner les positions relatives de C_1 et C_2 sur $\mathbb{R}$.

2°)

(a) À l'aide de deux intégrations par parties successives, déterminer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

(b) Calculer, en unités d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C_1, C_2 et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n=\int_0^1 (x-1)^{2n}\,e^{-x}\,dx$.

1°)

(a) Démontrer que, pour tout x de $[0\,;1]$ et pour tout entier naturel n non nul, $0\le (x-1)^{2n}\,e^{-x}\le (x-1)^{2n}$.

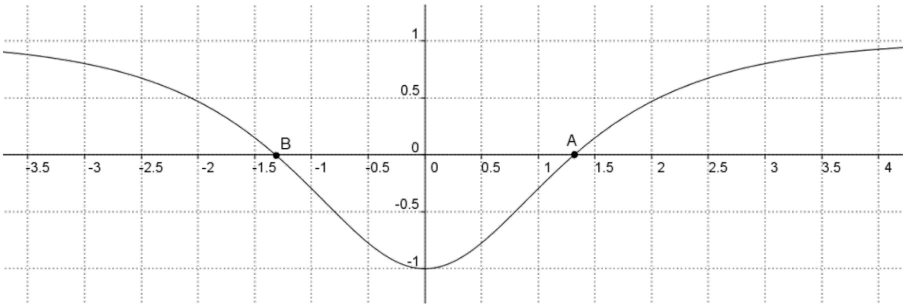
(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

2°) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°2 : La Réunion 2011 – 6 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{4e^x}{e^{2x}+1}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Sur le graphique ci-dessous on a tracé la courbe (C). Elle coupe l'axe des abscisses aux points A et B.



Partie A

L'objet de cette partie est de démontrer certaines propriétés de la fonction f que l'on peut conjecturer à partir du graphique.

1°) La fonction f semble croissante sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

(a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$.

(b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

2°) La droite d'équation $x = 0$ semble être un axe de symétrie de la courbe (C). Démontrer que cette conjecture est vraie.

3°) On désigne par a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

(a) Démontrer que le réel c est une solution de l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$. En déduire la valeur exacte de a.

(b) Donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x

Partie B

L'objet de cette partie est d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

1°) Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2°) Interpréter géométriquement le réel $F(a)$. En déduire que $-a \leq F(a) \leq 0$.

3°) On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

(a) Démontrer que pour tout réel positif t, $f(t) \geq 1-4e^{-t}$.

(b) En déduire que pour tout réel positif x, $F(x) \geq x-4$ et déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

4°) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Exercice n°3 : Centres Etrangers 2011 – 6 points

Soient f et g les fonctions définies sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = xe^{1-x}$ et $g(x) = x^2e^{1-x}$.

Les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ sont respectivement notées (C) et (C'). leur tracé est donné ci-dessous.

1°) Étude des fonctions f et g

(a) Déterminer les limites des fonctions f et g en $-\infty$.

(b) Justifier le fait que fonctions f et g ont pour limite 0 en $+\infty$.

(c) Étudier le sens de variations de chacune des fonctions f et g et dresser leurs tableaux de variations respectifs.

2°) Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n, on définit l'intégrale I_n par : $I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx$ et, si $n > 1$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}dx$.

(a) Calculer la valeur exacte de I_0.

(b) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = -1+(n+1)I_n$.

(c) En déduire la valeur exacte de I_1, puis celle de I_2.

3°) Calcul d'une aire plane

(a) Étudier la position relative des courbes (C) et (C').

(b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

(c) En exprimant $\mathcal{A}$ comme différence de deux aires que l'on précisera, démontrer l'égalité : $\mathcal{A} = 3 - e$.

4°) Étude de l'égalité de deux aires

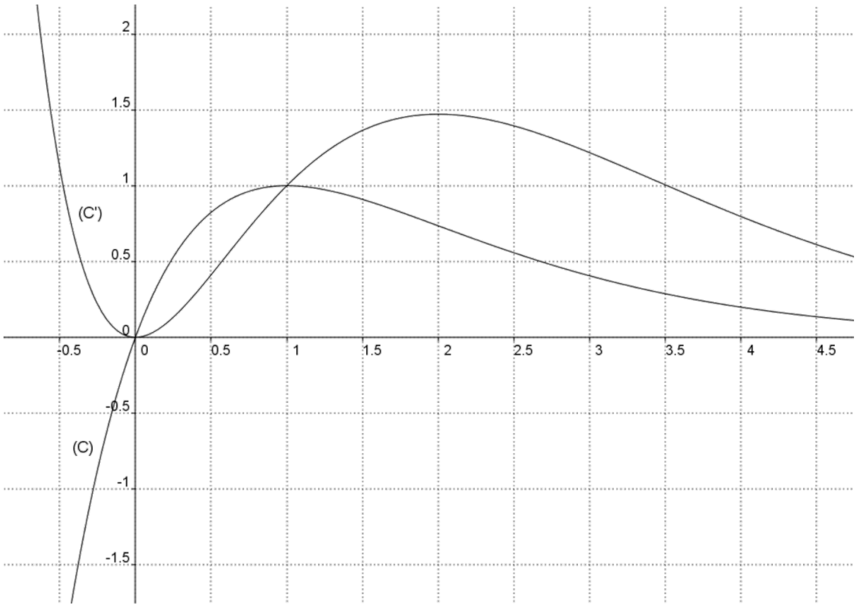
Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On désigne par $\mathcal{S}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes (C) et (C'), d'autre part entre les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$.
On admet que $\mathcal{S}(a)$ s'exprime par : $\mathcal{S}(a) = 3 - e^{1-a}\left(a^2+a+1\right)$.

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{S}(a)$ sont égales.

(a) Démontrer que l'équation $\mathcal{S}(a) = \mathcal{A}$ est équivalente à l'équation : $e^a = a^2+a+1$.

(b) *Dans cette question, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Conclure, quant à l'existence et l'unicité du réel a, solution du problème posé.



Exercice n°4 : France 2011 – 7 points

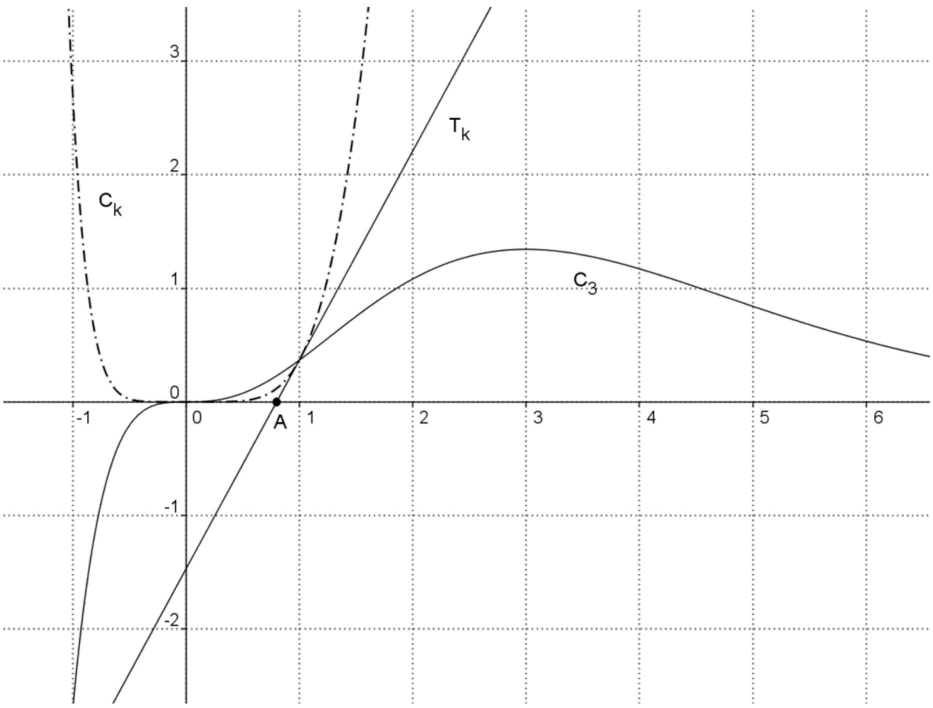
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$ du plan.

Partie A

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3.



La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées $\left(\frac{4}{5}\,;0\right)$.

1°)
(a) Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de la fonction f_1 et dresser le tableau de variations de f_1.
(c) À l'aide du graphique, justifier que k est un entier supérieur ou égal à 2.

2°)
(a) Démontrer que pour $n > 1$, toutes les courbes C_n passent par le point O et un autre point dont on donnera les coordonnées.
(b) Vérifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, et pour tout réel x, $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3°) Sur le graphique, la fonction f_3 semble admettre un maximum atteint pour $x = 3$.
Valider cette conjecture à l'aide d'une démonstration.

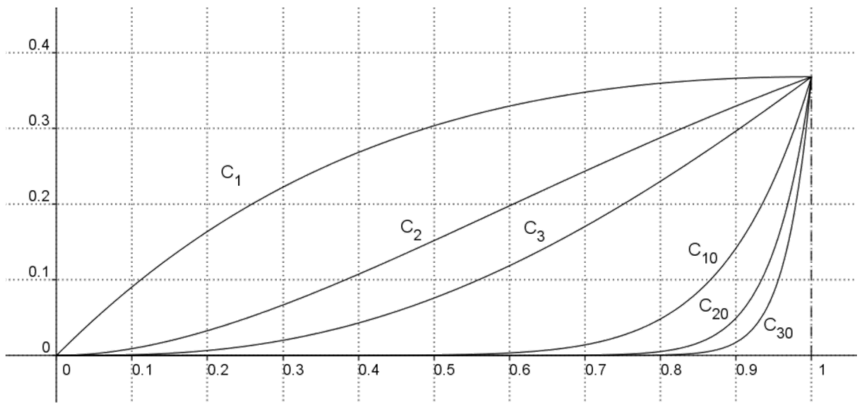
4°)
(a) Démontrer que la droite T_k coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $\left(\frac{k-2}{k-1}\,;0\right)$.
(b) En déduire, à l'aide des données de l'énoncé, la valeur de l'entier k.

Partie B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

1°) Calculer I_1.

2°) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les portions des courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20}, C_{30} comprises dans la bande définie par $0 \le x \le 1$.



(a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.
(b) Démontrer cette conjecture.
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice n°5 : Asie 2011 – 5 points

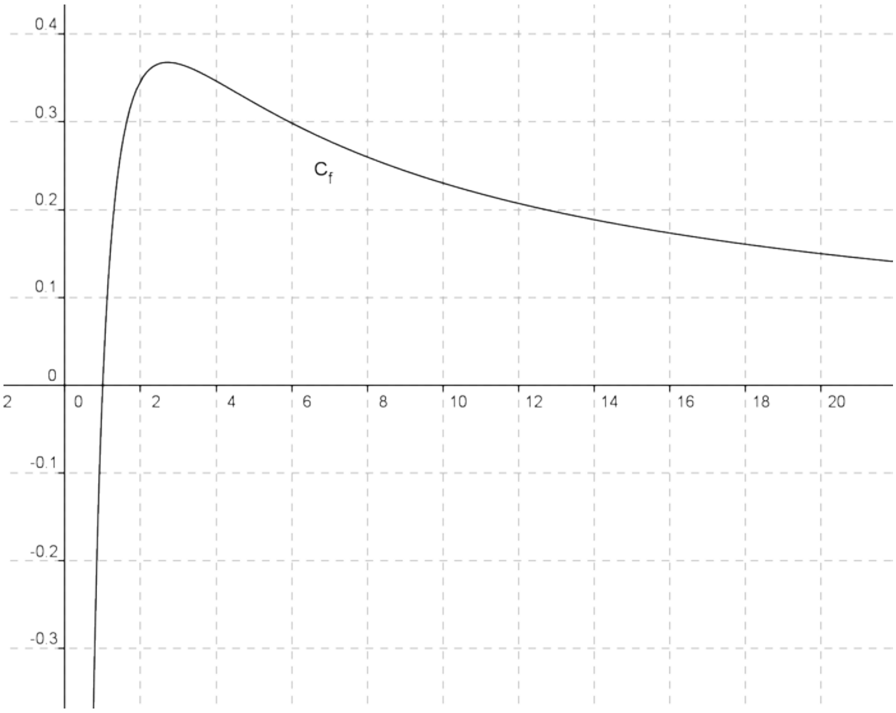
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1°) Étude d'une fonction f

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

On note C_f la courbe représentative de la fonction f dans le repère. La courbe C_f est représentée ci-dessous.



(a) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

(b) Calculer la dérivée f' de la fonction f.

(c) En déduire les variations de la fonction f.

2°) Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{(\ln x)^2}{x}$.

On note C_g la courbe représentative de la fonction g dans le repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

(a) Déterminer la limite de g en 0, puis en $+\infty$.

Après l'avoir justifiée, on utilisera la relation : $\dfrac{(\ln x)^2}{x}=4\dfrac{\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$.

(b) Calculer la dérivée g' de la fonction g.

(c) Dresser le tableau de variation de la fonction g.

3°)

(a) Démontrer que les courbes C_f et C_g possèdent deux points communs dont on précisera les coordonnées.

(b) Étudier la position relative des courbes C_f et C_g.

(c) Tracer sur le graphique la courbe C_g.

4°) On désigne par A l'aire, exprimée en unité d'aire, de la partie du plan délimitée, d'une part par les courbes C_f et C_g, et d'autre part par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$.
En exprimant l'aire A comme différence de deux aires que l'on précisera, calculer l'aire A.

Exercice n°6 : Pondichéry Avril 2010 : 6 points

Partie A - Restitution organisée de connaissances :

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a ; b]$. On suppose connus les résultats suivants :

• $\int_a^b (f(t)+g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$.

• Si pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) > 0$ alors $\int_a^b f(t)dt > 0$.

Montrer que : si pour tout $t \in [a;b]$, $f(t) \le g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \le \int_a^b g(t)dt$.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle f_n la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f_n(x) = \ln(1+x^n)$ et on pose $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$. On note C_n la courbe représentative de fn dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1°)

(a) Déterminer la limite de f_1 en $+\infty$.
(b) Étudier les variations de f_1 sur $[0;+\infty[$.
(c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_1 et interpréter graphiquement le résultat. (Pour le calcul de I_1 on pourra utiliser le résultat suivant : pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$).

2°)

(a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \le I_n \le \ln 2$.
(b) Étudier les variations de la suite (I_n).
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3°) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \ln(1+x) - x$.

(a) Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.
(b) En déduire le signe de g sur $[0;+\infty[$. Montrer alors que pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a $\ln(1+x^n) \le x^n$.
(c) En déduire la limite de la suite (I_n).

Exercice n°7 : Liban 2010 : 5 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances.

On supposera connus les résultats suivants :

* $e^0 = 1$. * Pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1°) Démontrer que pour tout réel x, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.

2°) Démontrer que pour tout réel x et pour tout entier naturel n, $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$.

Partie B : On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$.

1°)
(a) Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.
(b) Calculer u_1. En déduire u_0.

2°) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geq 0$.

3°)
(a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} + u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
(b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \leq \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4°) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice n°8 : Polynésie 2010 : 5 points

La figure qui suit l'exercice sera complétée.

Partie A

1°) On considère la fonction g définie sur $[1;+\infty[$ par $g(x) = \ln(2x) + 1 - x$.

(a) *Cette question demande le développement d'une certaine démarche comportant plusieurs étapes.*
La clarté du plan d'étude, la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction seront prises en compte dans la notation.

Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[1;+\infty[$ une unique solution notée α.

(b) Démontrer que $\ln(2\alpha) + 1 = \alpha$.

2°) Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = \ln(2u_n + 1)$.

On désigne par (C) la courbe d'équation $y = \ln(2x) + 1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

(a) En utilisant la courbe (C), construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite.
(b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$.
(c) Démontrer que la suite (u_n) converge vers α.

Partie B : On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par $f(x)=(x-1)e^{1-x}$.

On désigne par (H) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe est donnée ci-dessous.

1°) Pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, on pose : $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt=\int_1^x (t-1)e^{1-t}\,dt$.

(a) Démontrer que la fonction F est croissante sur $[1\,;+\infty[$.

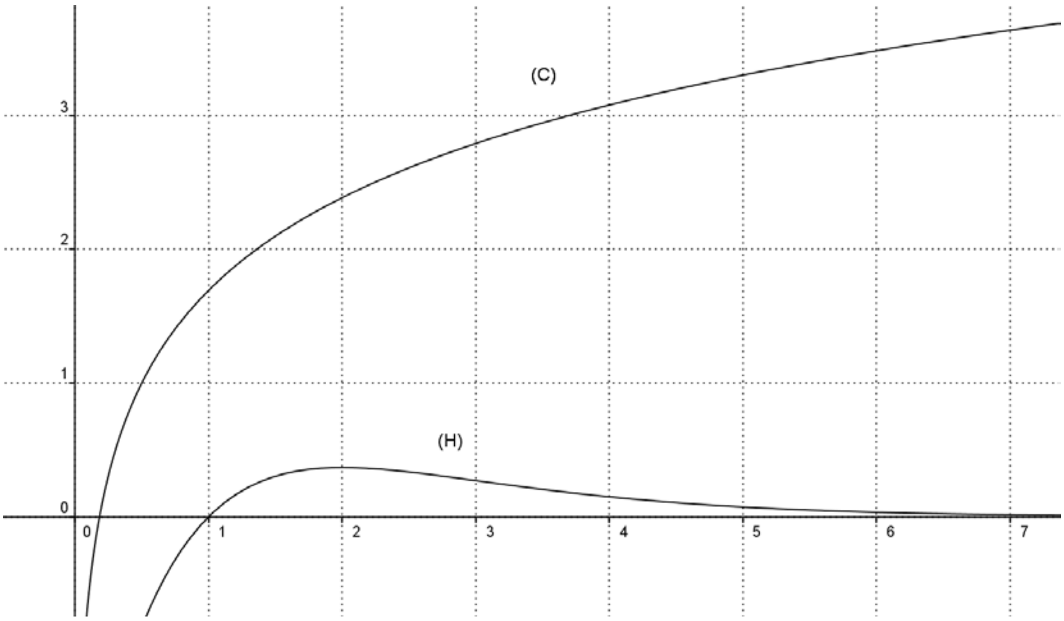
(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que pour tout réel x appartenant à $[1\,;+\infty[$,

$F(x)=-xe^{1-x}+1$.

(c) Démontrer que sur $[1\,;+\infty[$, l'équation $F(x)=\frac{1}{2}$ est équivalente à l'équation $\ln(2x)+1=x$.

2°) Soit un réel a supérieur ou égal à 1. On considère la partie D_a du plan limitée par la courbe (H), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=a$.

3°) Déterminer a tel que l'aire, en unités d'aires, de D_a, soit égale à $\frac{1}{2}$ et hachurer D_a sur le graphique.



Exercice n°9 : Asie 2010 : 7 points

L'objectif de l'exercice est l'étude d'une fonction et d'une suite liée à cette fonction.

PARTIE A : On note f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On note C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. L'unité graphique est 1 cm.

1°) Étude des limites

(a) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers 0.

(b) Déterminer la limite de la fonction f quand x tend vers $+\infty$.

(c) Quelles conséquences peut-on déduire de ces deux résultats, pour la courbe C ?

2°) Étude des variations de la fonction f

(a) Démontrer que f', la fonction dérivée de la fonction f s'exprime, pour tout réel $x > 0$, par :

$f'(x) = -\frac{1}{x^4} e^{\frac{1}{x}} (2x+1)$.

(b) Déterminer le signe de f' et en déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

(c) Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution notée α appartenant à l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et donner la valeur approchée de α arrondie au centième.

3°) Tracer la courbe C dans le repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

PARTIE B. Étude d'une suite d'intégrales

Pour tout entier naturel $n > 2$ on considère l'intégrale I_n définie par : $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx$.

1°) Calculer I_2.

2°) Une relation de récurrence

(a) Démontrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier naturel $n > 2$:

$I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n$.

(b) Calculer I_3.

3°) Étude de la limite de la suite de terme général I_n

(a) Établir que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle [1 ; 2], on a : $0 \le \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \le \frac{e}{x^n}$.

(b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de la suite (I_n).

Exercice n°10 : Réunion 2010 : 5 points

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées indépendamment.

Partie A : On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifiant la condition (E) : pour tout nombre réel x strictement positif, $xf'(x) - f(x) = x^2 e^{2x}$.

1°) Montrer que si une fonction f, définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$, vérifie la condition (E), alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ vérifie : pour tout nombre réel x strictement positif, $g'(x) = e^{2x}$.

2°) En déduire l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifient la condition (E).

3°) Quelle est la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ qui vérifie la condition (E) et qui s'annule en $\frac{1}{2}$?

Partie B : On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(x) = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{e}{2} x$. On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer, suivant les valeurs du nombre réel positif x, le signe de $h(x)$.

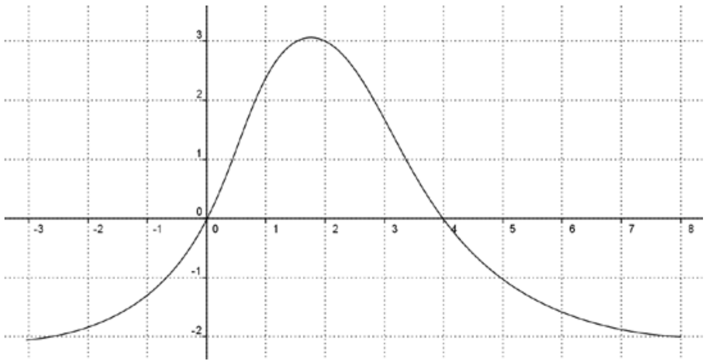
2°)

(a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x}dx$ et en déduire $\int_0^{\frac{1}{2}} h(x)dx$.

(b) En déduire, en unité d'aire, la valeur exacte de l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus de la courbe C.

Exercice n°11 : Antilles-Guyane 2010 : 4 points

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle I = [−3 ; 8].



On définit la fonction F sur I par $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

1°)

(a) Que vaut $F(0)$?

(b) Donner le signe de $F(x)$:

- pour $x \in [0;4]$;
- pour $x \in [-3;0]$.

Justifier les réponses.

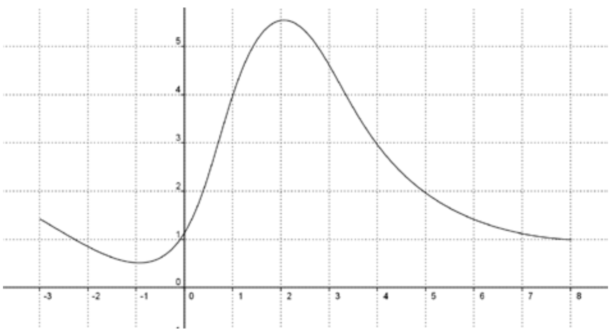
(c) Faire figurer sur le graphique les éléments permettant de justifier les inégalités $6 \le F(4) \le 12$.

2°)

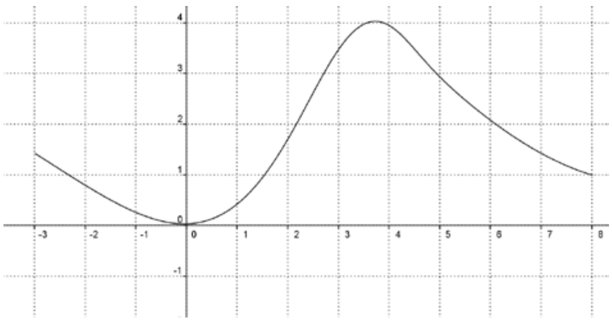
(a) Que représente f pour F ?

(b) Déterminer le sens de variation de la fonction F sur I. Justifier la réponse à partir d'une lecture graphique des propriétés de f.

3°) On dispose de deux représentations graphiques sur I.



Courbe A



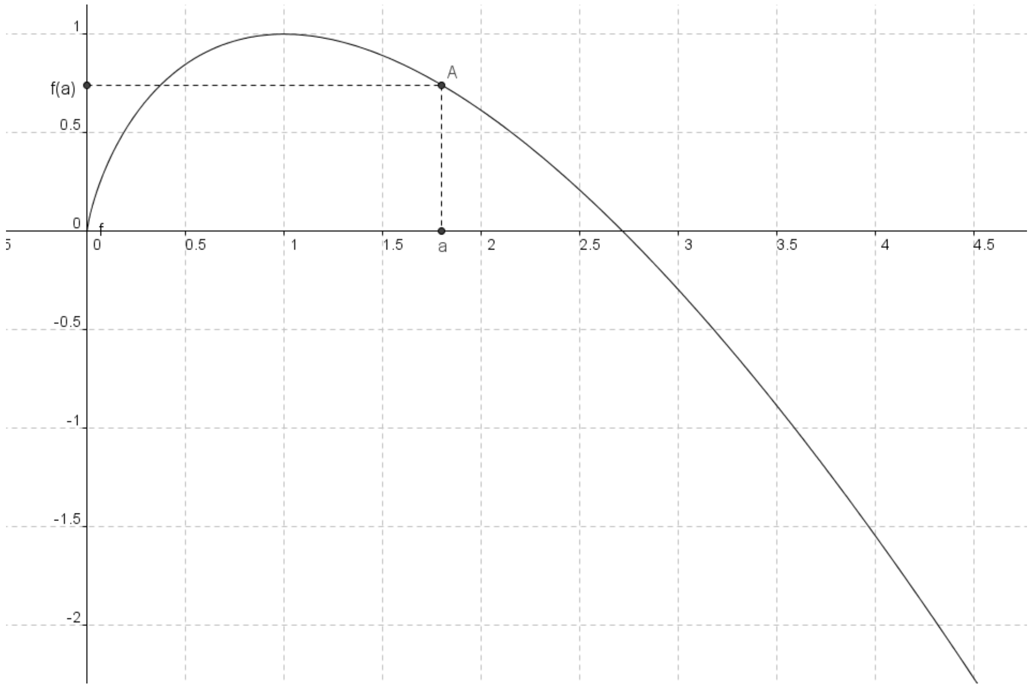
Courbe B

L'une de ces courbes peut-elle représenter la fonction F ? Justifier la réponse.

Exercice n°12 : France Septembre 2010 : 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=x(1-\ln x)$.

La courbe représentative C de la fonction f est donnée ci-dessous.



Partie I : Étude de la fonction f

1°) Étudier le signe de $f(x)$ suivant les valeurs du nombre réel x.

2°) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

3°) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

4°) Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_A) au point A de la courbe C d'abscisse a.

(a) Déterminer, en fonction du nombre réel a, les coordonnées du point A_0, point d'intersection de la droite (T_A) et de l'axe des ordonnées.

(b) b. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_A). Construire la tangente (T_A) au point A placé sur la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

Soit a un nombre réel strictement positif. On note $\mathcal{A}(a)$ la mesure, en unité d'aire, de l'aire de la région du plan limitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = e$.

1°) Justifier que $\mathcal{A}(a)=\int_a^e f(x)dx$, en distinguant le cas $a < e$ et le cas $a > e$.

2°) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathcal{A}(a)$ en fonction de a.

Exercice n°13 : Amérique du Sud Nov. 2010 : 5 points

Le but de l'exercice est de donner un encadrement du nombre I défini par : $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$

Soit f la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x) = \frac{e^x}{1+x}$.

1°) Étudier les variations de f sur [0 ; 1].

2°) On pose, pour tout entier naturel $S_n = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{5}\right)$.

(a) Justifier que pour tout entier k compris entre 0 et 4, on a : $\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$

Interpréter graphiquement à l'aide de rectangles les inégalités précédentes.

(b) En déduire que : $\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

(c) Donner des valeurs approchées à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 respectivement.

En déduire l'encadrement : $1{,}091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1{,}164$.

3°) Démontrer que pour tout réel x de [0 ; 1], on a : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$.

(a) Justifier l'égalité $\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + I$.

(b) Calculer $\int_0^1 (1-x)e^x dx$.

(c) En déduire un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx$ d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1}.

Exercice n°14 : Nouvelle-Calédonie Nov. 2010 : 7 points

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

On suppose connus les résultats suivants : Soient u et v deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a < b$

- si pour tout $x \in [a;b]$ $u(x) \geq 0$ alors $\int_a^b u(x) dx \geq 0$
- $\int_a^b [u(x) + v(x)] dx = \int_a^b u(x) dx + \int_a^b v(x) dx$
- $\int_a^b \alpha u(x) dx = \alpha \int_a^b u(x) dx$ où α est un nombre réel.

Démontrer que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ avec $a<b$ et si pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

PARTIE B : Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $\varphi(x)=1+x^2-2x^2\ln x$.

1°)

(a) Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

(b) Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1 ; \mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

(c) Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2°) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{1+x^2}$.

On note f' la fonction dérivée de f .

(a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geq 1$ on a : $f'(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

(b) Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

(c) Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1;+\infty[$ on a : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{\ln x}{x^2}$.

(d) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3°)

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\int_1^{\mathrm{e}} \dfrac{\ln x}{x^2} dx = 1-\dfrac{2}{e}$.

(b) On note C la courbe représentative de la fonction f , dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$ d'unité graphique 1 cm.
Soit A l'aire exprimée en cm² du domaine compris entre la courbe C , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=\mathrm{e}$.
Déterminer un encadrement de A .