Fiche d'exercices type Bac

Chapitre 10 : Calcul Intégral

Année scolaire 2011-2012

mise à jour 29 mars 2012

Polynésie Septembre 2011 — 6 points

Partie A Question de cours
Partie B

Les courbes sont tracées en annexe.

1. **a.** On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$f(x)=g(x) \iff (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}=\frac{3}{2}(x-1)^2 \iff (x-1)^2\left[\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}\right]=0 \iff \begin{cases}(x-1)^2 &= 0\\ \mathrm{e}^{-x}-\dfrac{3}{2} &= 0\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}x &= 1\\ -x &= \ln\left(\frac{3}{2}\right)\end{cases} \iff \begin{cases}x &= 1\\ x &= \ln\left(\frac{2}{3}\right)\end{cases}$$

$\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ ont donc deux points communs de cordonnées $(1\,;0)$ et $\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)\,;\,\frac{3}{2}\left(\ln\left(\frac{2}{3}\right)-1\right)^2\right)$.

b. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x): f(x)-g(x)=(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}(x-1)^2=(x-1)^2\left[\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}\right]$.

Exception faite de $d(1)=0$, le signe de d est celui de la différence $\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}$.

Or $\mathrm{e}^{-x}-\frac{3}{2}>0 \iff \mathrm{e}^{-x}>\frac{3}{2} \iff -x>\ln\frac{3}{2} \iff x<-\ln\frac{3}{2} \iff x<\ln\frac{2}{3}$.

Conclusion : $\mathscr{C}_1$ est au dessus de $\mathscr{C}_2$ sur $\left]-\infty\,;\ln\frac{2}{3}\right[$; on trouve de même que $\mathscr{C}_1$ est au dessous de $\mathscr{C}_2$ sur $\left]\ln\frac{2}{3}\,;\infty\right[$.

On a vu dans la question précédente que les deux courbes ont deux points communs.

2. **a.** Calcul de $I=\displaystyle\int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$:

Soit $\begin{cases}u(x) &= (x-1)^2\\ v'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x) &= 2(x-1)\\ v(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$; on peut donc intégrer par parties :

$$I=\left[-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]_{0^1}-\int_0^1 2(x-1)\times\left(-\mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x=\left[-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 2(x-1)\times\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Donc $I=1+\displaystyle\int_0^1 2(x-1)\times\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$

Soit $J=\displaystyle\int_0^1 2(x-1)\times\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ et intégrons à nouveau par parties :

Soit $\begin{cases}u(x) &= 2(x-1)\\ v'(x) &= \mathrm{e}^{-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x) &= 2\\ v(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\end{cases}$

Donc $J=\left[-2(x-1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1+2\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\left[-2(x-1)\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1+\left[-2\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1=-2e^{-1}$.

Finalement : $I=1-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

b. On a vu à la question 1. b. que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, $\mathscr{C}_1$ est au dessous de $\mathscr{C}_2$. L'aire cherchée est donc égale, en unités d'aire, à l'intégrale :
$\displaystyle\int_0^1 \left[\frac{3}{2}(x-1)^2-(x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\right]\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3}{2}(x-1)^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 (x-1)^2\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{3(x-1)^3}{2}\right]_0^1 - I = \frac{1}{2} - \left(1-\frac{2}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}$ (u.a.)

Partie C

1. **a.** On sait que $0 \leqslant x \leqslant 1$, d'où $-1 \leqslant -x \leqslant 0$ et par croissance de la fonction exponentielle $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{0}$ ou encore $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x} \leqslant 1 \quad (1)$.
Or $(x-1)^{2n} = \left[(x-1)^2\right]^n \geqslant 0$ puisque $(x-1)^2 \geqslant 0$.
Donc en multipliant chaque membre de l'encadrement (1) par le nombre positif $(x-1)^{2n}$, on obtient :
$\mathrm{e}^{-1}(x-1)^{2n} \leqslant \mathrm{e}^{-x}(x-1)^{2n} \leqslant 1 \times (x-1)^{2n} \quad (1)$ et finalement

$$0 \leqslant (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x} \leqslant (x-1)^{2n}.$$

b. par intégration des trois fonctions de l'encadrement du **a.**, on obtient
$\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 (x-1)^{2n}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant u_n \leqslant \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1 \iff 0 \leqslant u_n \leqslant -\frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \iff 0 \leqslant u_n \leqslant +\frac{(-1)^{2n}}{2n+1}$ et finalement :

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2n+1}.$$

2. L'encadrement précédent et le fait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$ montre par application du théorème des « gendarmes », que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Réunion Juin 2011 — 6 points

Partie A

1. **a.** La fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne prend que des valeurs strictement positives, alors la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{2x}+1$ est dérivable et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -\dfrac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-2\mathrm{e}^{2x}\times 4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = -\dfrac{4\mathrm{e}^x\left(1-\mathrm{e}^{2x}\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\quad f'(x) = \frac{4\mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}}$$

b. Pour tout réel x,

$$\frac{4\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} > 0$$

alors $f'(x)$ est du même signe que $\mathrm{e}^{2x}-1$.
Puisque la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x>0$, on a $2x>0$, alors $\mathrm{e}^{2x} > \mathrm{e}^0$ soit $\mathrm{e}^{2x}-1>0$.
$\forall x \in]0;+\infty[$, $f'(x)>0$ et $f'(0)=0$, alors

$$\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$$

2. f est définie sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(-x) = 1-\frac{4\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}+1} = 1-\frac{4\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{-2x}\left(1+\mathrm{e}^{2x}\right)} = 1-\frac{4\mathrm{e}^{x}}{1+\mathrm{e}^{2x}} = f(x)$$

Ainsi la fonction f est paire et, graphiquement :

$$\boxed{\text{la courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport à la droite d'équation } x = 0}$$

3. a. Les coordonnées du point A sont $(a,0)$ avec $a > 0$ et $A \in \mathscr{C}$, alors $f(a) = 0 \Longrightarrow 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^{2a}+1} = \dfrac{\mathrm{e}^{2a} - 4\mathrm{e}^a + 1}{\mathrm{e}^{2a}+1} = 0 \Longrightarrow (\mathrm{e}^a)^2 - 4\mathrm{e}^a + 1 = 0$

Si on pose $c = \mathrm{e}^a$, alors

$$\boxed{c \text{ est une solution de l'équation } x^2 - 4x + 1 = 0}$$

On résout l'équation $x^2 - 4x + 1 = 0$; elle admet deux solutions réelles positives $2 - \sqrt{3}$ et $2 + \sqrt{3}$, alors $a \in \left\{\ln\left(2 - \sqrt{3}\right), \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)\right\}$.
Puisque $2 - \sqrt{3} \in]0;1[$, alors $\ln\left(2 - \sqrt{3}\right) < 0$ et, a étant positif :

$$\boxed{a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)}$$

b. f est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et s'annule en $a = \ln\left(2 + \sqrt{3}\right)$ alors, en utilisant la parité de f, on en déduit :

- $f(x) > 0$ si $x \in]-\infty;-a[\cup]a;+\infty[$;
- $f(x) < 0$ si $x \in]-a;a[$;
- $f(-a) = f(a) = 0$.

Partie B

1. On reconnaît, sous forme intégrale, l'expression de la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction f, alors F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F' = f$. Les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$ se déduisent alors du signe de $f(x)$:

- F est strictement croissante sur $]-\infty\,;\,-a]$ et sur $[a\,;\,+\infty[$;
- F est strictement décroissante sur $[-a\,;\,a]$.

2. f étant continue et négative sur $[0\,;\,a]$, $F(a) = \displaystyle\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a \left|f(t)\right|\,\mathrm{d}t$ est l'opposé de l'aire, en unités d'aire, du domaine plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Ce domaine est contenu dans un rectangle dont les dimensions sont $\left|f(0)\right| = 1$ et a, alors $0 \leqslant -F(a) \leqslant 1 \times a$, d'où :

$$\boxed{-a \leqslant F(a) \leqslant 0}$$

3. a. Soit $t \in [0,+\infty[$, $\quad f(t) = 1 - \dfrac{4\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^{2t}\left(1 + \mathrm{e}^{-2t}\right)} = 1 - 4\mathrm{e}^{-t} \times \left(\dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}\right)$.

On est donc amené à comparer $\dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2t}}$ avec 1 ;

Soit $t \geqslant 0$, on a : $\mathrm{e}^{-2t} > 0$, puis : $\mathrm{e}^{-2t} + 1 > 1$,
alors, par stricte décroissance de la fonction « inverse » sur $]0;+\infty[$,

$$\frac{1}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} < 1$$

En multipliant chaque membre par $-4\mathrm{e}^{-t} < 0$:

$$\frac{-4\mathrm{e}^{-t}}{1 + \mathrm{e}^{-2t}} > -4\mathrm{e}^{-t}$$

Finalement, en ajoutant 1 :

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } t, \quad f(t) \geqslant 1 - 4\mathrm{e}^{-t}}$$

b. Soit $x \geqslant 0$.
Puisque l'intégrale entre des bornes croissantes « conserve l'ordre », alors (d'après la question précédente) :

$$\underbrace{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}_{F(x)} \geqslant \underbrace{\int_0^x \left(1-4\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t}_{[t+4\mathrm{e}^{-t}]_0^x}$$

$\left[t+4\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x = x+4\mathrm{e}^{-x}-4 \geqslant x-4$, car $\mathrm{e}^{-x}>0$. On a bien :

$$\boxed{\text{pour tout réel positif } x,\quad F(x)\geqslant x-4}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} x-4=+\infty$, par comparaison :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty}$$

4. Puisque la fonction f est paire, on peut penser que sa primitive F qui s'annule en 0 est impaire, c'est-à-dire

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F(-x)=-F(x) \iff \forall x\in\mathbb{R},\ F(-x)+F(x)=0$$

Pour cela, on considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(-x)+F(x)$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est définie, pour tout réel x, par $-f(-x)+f(x)=0$ car f est paire, alors :

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(-x)+F(x)=F(-0)+F(0)=0$. Alors F est impaire.

Par imparité :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} F(x)=-\lim_{x\to+\infty} F(x)=-\infty}$$

Centres Étrangers Juin 2011 — 6 points

1. Étude des fonctions f et g

a. $f(x)=\mathrm{e}x\mathrm{e}^{-x}$ et $g(x)=\mathrm{e}x^2\mathrm{e}^{-x}$.

On a $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{-x}=+\infty$, d'où par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$.

b. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x}=0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

De même comme pour tout naturel n, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\mathrm{e}^{-x}=0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

c. f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle $f'(x)=\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^{-x}-x\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}(1-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$ qui est positif sur $]-\infty\,;\,1[$ et négatif sur $]1\,;\,+\infty[$.

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f?(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	{1	$\searrow$	$-\infty$

g produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle $g'(x)=\mathrm{e}\left(2x\mathrm{e}^{-x}-x^2\mathrm{e}^{-x}\right)=\mathrm{e}\mathrm{e}^{-x}x(2-x)$.

Comme $\mathrm{e}^{-x}>0$ quel que soit le réel x, le signe de $g'(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$ qui est négatif sauf entre les racines 0 et 2.

D'où le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$g?(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\{0$	$\nearrow$	$\{\frac{4}{e}$	$\searrow$	$\{0$

2. Calcul d'intégrales

a. $I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = \mathrm{e}\left[-\mathrm{e}^{-1}+1\right] = \mathrm{e}-1.$

b. On a $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{1-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}\int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

On pose :

$$\begin{cases} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = n+1x^n \\ v'(x) = \mathrm{e}^{-x} & v(x) = -\mathrm{e}^{-x} \end{cases}$$

Toutes les fonctions sont continues car dérivables sur $\mathbb{R}$, on peut donc faire une intégration par parties :

$I_n+1 = \mathrm{e}\left[-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 - \mathrm{e}\displaystyle\int_0^1 (n+1)x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}[-\mathrm{e}+0] - \mathrm{e}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -\mathrm{e}\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}(n+1)I_n = -1+(n+1)I_n.$

c. La formule précédente donne pour $n=0$, $I_1 = -1+I_0 = -1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}-2.$

Pour $n=1$, $I_2 = -1+2I_1 = -1+2(\mathrm{e}-2) = 2\mathrm{e}-5.$

3. Calcul d'une aire plane

a. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $d(x) = f(x)-g(x) = x\mathrm{e}^{1-x} - x^2\mathrm{e}^{1-x} = x\mathrm{e}^{1-x}(1-x).$

Comme $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, le signe de $f(x)$ est celui du trinôme $x(1-x)$, soit négatif sauf entre les racines du trinôme 0 et 1.

Ceci montre que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessus de la courbe $\mathscr{C}'$ sur $]0\,;\,1[$ et au dessous sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]1\,;\,+\infty[$.

b. On vient de voir que sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ $f(x) \geqslant g(x)$, donc l'aire de la partie du plan comprise d'une part entre les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$, d'autre part entre les droites d'équations respectives $x=0$ et $x=1$ est égale à la différence des intégrales :

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x = I_1 - I_2 = \mathrm{e}-2-(2\mathrm{e}-5) = 3-\mathrm{e}.$$

par linéarité de l'intégrale.

4. Étude de l'égalité de deux aires

a. On a $S_a = \mathscr{A} \iff 3-\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = 3-\mathrm{e} \iff -\mathrm{e}^{1-a}\left(a^2+a+1\right) = -\mathrm{e} \iff \mathrm{e}\times\mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = \mathrm{e} \iff \mathrm{e}^{-a}\left(a^2+a+1\right) = 1 \iff$

$a^2+a+1 = \mathrm{e}^a.$

b. Il reste à résoudre l'équation $\mathrm{e}^x = x^2+x+1$ équivalente à $\mathrm{e}^x - x^2 - x - 1 = 0$ sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.

Si on pose, pour tout x réel : $h(x) = \mathrm{e}^x - x^2 - x - 1$, cela revient à chercher un zéro de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

Cette fonction est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle

$h'(x) = \mathrm{e}^x - 2x - 1$ qui elle-même est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$h''(x) = \mathrm{e}^x - 2$

On a $h''(x) = 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 2 \iff x = \ln 2$

Donc $h''(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 2 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 2 \iff x > \ln 2.$

h' est continue et strictement croissante sur $[\ln 2\ ;\ +\infty[$ et à fortiori sur $[1\ ;\ +\infty[$ puisque $\ln 2 \approx 0,69 < 1$.
On a $h'(1) = \mathrm{e}^1 - 2 - 1 = \mathrm{e} - 3 < 0$.
De plus $\lim\limits_{x \to +\infty} h'(x) = +\infty$ (limite obtenue en factorisant e^x.)
Donc, d'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique α, $1 < \alpha$ tel que $h'(\alpha) = 0$.
On en déduit que h est strictement négative sur $]1\ ;\ \alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.
h est donc strictement décroissante sur $]1\ ;\ \alpha[$ et strictement croissante sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$.
D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} h(x) = \mathrm{e} - 3 \approx -0,28$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Ainsi h est strictement négative sur $]1\ ;\ \alpha[$.
Enfin, h étant continue est strictement croissante sur $[\alpha\ ;\ +\infty[$, il existe $\beta \in]\alpha\ ;\ +\infty[$, unique, tel que $h(\beta) = 0$.
Avec une table de valeurs ou le solveur de la calculatrice on trouve aisément : $\alpha \approx 1,26$ et $\beta \approx 1,79$. (Voir la figure ci-dessous)

France Juin 2011 — 7 points

PARTIE A

1. **a.** $f_1(x) = x\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x}$.
$\lim_{x \to -\infty}(-x) = +\infty$ donc $\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim_{X \to +\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$, d'où, par produit : $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$.

D'après le cours (croissances comparées), $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$: $\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 0$.

b. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{-x} + x \times (-\mathrm{e}^{-x}) = (1 - x)\mathrm{e}^{-x}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f_1'(x)$ est du signe de 1-x, donc positif pour $x \leqslant 1$ et nulle pour $x = 1$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f?(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\{\dfrac{1}{e}$	$\searrow$	$\{0$

c. On sait que $k \geqslant 1$; $\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = -\infty$, ce qui n'est pas le cas pour f_k d'après le graphique, donc $k \neq 1$, c'est-à-dire $k \geqslant 2$.

2. **a.** Pour tout $n \geqslant 1$, on a $f_n(0) = 0 \times \mathrm{e}^0 = 0$ et $f_n(1) = 1^n\mathrm{e}^{-1} = \mathrm{e}^{-1} = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
Toutes les courbes C_n passent par l'origine et le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, f_n est dérivable comme produit et composée de fonctions dérivables.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x} + x^n \times (-\mathrm{e}^{-x}) = x^{n-1}(n - x)\mathrm{e}^{-x}$

3. $f_3'(x) = x^2(3 - x)\mathrm{e}^{-x}$, qui s'annule en $x = 3$ et est du signe de $3 - x$, donc positif pour $x \leqslant 3$ et négatif pour $x \geqslant 3$.
La fonction f_3 admet donc bien un maximum en 3.

4. **a.** L'équation de la tangente T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1)$, donc $y = \dfrac{k-1}{\text{e}}(x-1) + \dfrac{1}{\text{e}}$ soit $y = \dfrac{(k-1)x-k+2}{\text{e}}$.

$y = 0$ pour $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

b. On sait que T_k coupe l'axe des abscisses en $\dfrac{4}{5}$. On résout donc l'équation $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5}$. On obtient $5(k-2) = 4(k-1)$, d'où $k = 6$.

PARTIE B

On désigne par (I_n) la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par

$$I_n = \int_0^1 x^n \text{e}^{-x}\,\text{d}x.$$

1. $I_1 = \int_0^1 x\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \int_0^1 u(x)v'(x)\,\text{d}x$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \text{e}^{-x} \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -\text{e}^{-x} \end{cases}$.

u et v sont dérivables, u' et v' sont continues. On peut effectuer une intégration par parties.

$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)\,\text{d}x = [-x\text{e}^{-x}]_0^1 + \int_0^1 \text{e}^{-x}\,\text{d}x = -\dfrac{1}{\text{e}} + [-\text{e}^{-x}]_0^1 = -\dfrac{1}{\text{e}} - \dfrac{1}{\text{e}} + 1 = 1 - \dfrac{2}{\text{e}}$.

2. **a.** Sur $[0\,;\,1]$, f_n est continue et positive, donc I_n représente l'aire comprise entre les droites d'équations $x = 0$, $x = 1$, la courbe C_n et l'axe des abscisses. On voit sur le graphique que ces aires semblent décroissantes, donc la suite (I_n) semble décroissante.

b. Pour tout $n \geqslant 1$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\text{e}^{-x}\,\text{d}x - \int_0^1 x^n\text{e}^{-x\,\text{d}x} = \int_0^1 [x^{n+1}\text{e}^{-x} - x^n\text{e}^{-x}]\,\text{d}x$ (par linéarité)

$= \int_0^1 x^n(x-1)\text{e}^{-x}\,\text{d}x$.

Sur $[0\,;\,1]$, $x^n \geqslant 0$, $\text{e}^{-x} \geqslant 0$ et $x-1 \leqslant 0$ donc $x^n(x-1)\text{e}^{-x} \leqslant 0$. On intègre sur $[0\,;\,1]$ une fonction continue négative, donc le résultat est un nombre négatif (positivité de l'intégrale).

On en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$ donc la suite (I_n) est décroissante.

c. Il est évident que $I_n \geqslant 0$ (intégrale d'une fonction positive). La suite (I_n) est donc décroissante et minorée, donc convergente vers un rééel ℓ.

d. Montrons que $\ell = 0$.

Première méthode : sur $[0\,;\,1]$, $x \longmapsto -x$ est décroissante, donc par composition avec exp, $x \longmapsto \text{e}^{-x}$ est décroissante, donc $\text{e}^{-x} \leqslant \text{e}^0 = 1$.

Sur $[0\,;\,1]$, $f_n(x) = x^n\text{e}^{-x} \leqslant x^n$, donc par propriété de l'intégration,

$$\int_0^1 f_n(x)\,\text{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\text{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Par conséquent : $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$; or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème de gendarmes, $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Deuxième méthode : On a : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\text{e}^{-x}\,\text{d}x = \int_0^1 u_{n+1}(x)v'(x)\,\text{d}x$ avec $\begin{cases} u_{n+1}(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = \text{e}^{-x} \end{cases}$

d'où $\begin{cases} u_{n+1}'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -\text{e}^{-x} \end{cases}$

u_{n+1}' et v' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties.

On obtient : $I_{n+1} = \left[-x^{n+1}\text{e}^{-x}\right]_0^1 + \int_0^1 x^n\text{e}^{-x}\,\text{d}x = -\dfrac{1}{\text{e}} + (n+1)I_n$.

On en déduit : $\dfrac{I_{n+1}}{n+1} = -\dfrac{1}{(n+1)\text{e}} + I_n$.

Si ℓ est la limite de I_n à l'infini, par passage à la limite, on obtient : $0 = 0 + \ell$ donc $\ell = 0$

Asie Juin 2011 — 5 points

1.

$$(\forall x \in]0;+\infty[) \qquad f(x)=\frac{\ln x}{x}.$$

a. La limite de la fonction f en 0 est $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}(\ln(x))=-\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.
En $+\infty$, la limite de la fonction f est 0 (voir le cours).

b. $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}\times(1-\ln(x))$.

c. $f'(x)$ est du signe de $(1-\ln(x))$ sur $]0\ ;\ +\infty[$,
or sur $]0\ ;\ +\infty[$;
$1-\ln(x)>0 \iff x<\mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x)<0 \iff x>\mathrm{e}$; $\quad 1-\ln(x)=0 \iff x=\mathrm{e}$

x	0		e		$+\infty$
$f?(x)$	||	+	0	−	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	$-\infty$

2. Étude d'une fonction g

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

a. La limite de g en 0 est $+\infty$ car $g(x)=f(x)\times\ln(x)$ or ,
$\lim\limits_{x\to 0;x>0}(\ln(x))=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 0\ ;\ x>0}(f(x))=-\infty$; donc on obtient par produit le résultat énoncé.
La limite de g en $+\infty$ est 0 car :

$$4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{2\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2=\left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right)^2=\frac{(\ln(x))^2}{x}=g(x).$$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}(g(x))=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\right)^2\right)=\lim\limits_{X\to+\infty}\left(4\left(\frac{\ln(X)}{X}\right)^2\right)=0$ car $\lim\limits_{X\to+\infty}\left(\frac{\ln(X)}{X}\right)=0$; on a posé $X=\sqrt{x}$ et X tend vers $+\infty$ quand $x$tend vers $+\infty$.

b. $g'(x)=\dfrac{1}{x^2}\times\left(2\ln(x)-(\ln(x))^2\right)=\dfrac{1}{x^2}\times(2-\ln(x))\times\ln(x)$,

donc $g'(x)$ s'annule ssi $\ln(x)=0$ ou $\ln(x)=2$ donc pour $x=1$ ou $x=\mathrm{e}^2$.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln(x)$	||	−	0			+	
$(2-\ln(x))$	||	+		+	0	−	
$g'(x)$	||	−	0	+	0	−	

c.

x	0		1		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	||	−	0	+	0	−	
$f(x)$	|| $+\infty$	$\searrow$	{0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** Les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ se coupent aux points dont les abscisses sont les solutions $f(x) = g(x)$
$f(x) = g(x) \iff \ln(x) = (\ln(x))^2 \iff 0 = (\ln(x))^2 - \ln(x) \iff 0 = \ln(x) \times (\ln(x) - 1) \iff$
$\ln(x) = 0$ ou $\ln(x) = 1 \iff x = 1$ ou $x = \mathrm{e}$
ce sont les deux points $A(1~;~0)$; $B\left(\mathrm{e}~;~\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$.

b. La position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ est donnée par l'étude du signe de $f(x) - g(x)$.
$f(x) - g(x) < 0 \iff \ln(x) < (\ln(x))^2 \iff \ln(x)(1 - \ln(x)) < 0$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln(x)$	||	$-$	0			+	
$(1-\ln(x))$	||	+		+	0	$-$	
$\ln(x) \times (1 - \ln(x))$	||	$-$	0	+	0	$-$	

$f(x) - g(x) < 0 \iff \ln(x) < 0$ ou $\ln(x) > 1 \iff x < 1$ ou $x > \mathrm{e}$
$f(x) - g(x) > 0 \iff 1 < x < \mathrm{e}$

La courbe de f est au dessus de la courbe de g pour $x \in]1~;~\mathrm{e}[$.
La courbe de f est au dessous de la courbe de g pour $x \in]0~;~1[\cap]\mathrm{e}~;~+\infty[$.
La courbe de f coupe la courbe de g pour $x = 1$ ou pour $x = \mathrm{e}$.

c. On a tracé sur le graphique de l'annexe 1 (à rendre avec la copie) la courbe C_g.

4. $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ car sur $[1~;~\mathrm{e}]$, $f(x) \geq g(x)$ et f et g sont continues sur cet intervalle.
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} (\frac{\ln(x)}{x})\,\mathrm{d}x - \int_1^{\mathrm{e}} (\frac{(\ln(x))^2}{x}) dx = [\frac{(\ln(x))^2}{2} - \frac{(\ln(x))^3}{3}]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

(pour trouver les primitives, on a reconnu la forme $u^n \times u'$ avec $u : x \mapsto u(x) = \ln(x)$ et $u' : x \mapsto u'(x) = \frac{1}{x}$ et pour la première intégrale $n = 1$ c'est $u \times u'$ et pour la deuxième $n = 2$ c'est $u^2 \times u'$;

et si $n \neq -1$, alors $u^n \times u'$ a pour primitive $x \mapsto \frac{u(x)^{n+1}}{n+1}$.

Pondichéry Avril 2011 — 6 points

Partie A : Restitution organisée de connaissances

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a~;~b]$ donc $g - f$ est continue sur $[a~;~b]$ Pour tout x de $[a~;~b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ donc $g(x) - f(x) \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
$\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ donc $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$
soit $\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie B

1. **a.** Pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f_1(x) = \ln(1 + x)$.
Soit $X = 1 + x$, $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} X = +\infty$;
$f_1(x) = \ln X$ or $\displaystyle\lim_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = +\infty$.

b. f_1 est la composée de deux fonctions :
$x \longmapsto 1 + x$ continue et dérivable sur $[0~;~+\infty[$, à valeurs dans $[1~;~+\infty[$ et
$x \longmapsto \ln x$, continue et dérivable sur $[1~;~+\infty[$, donc f_1 est continue et dérivable sur $[0~;~+\infty[$.
$f_1'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ donc pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $f_1'(x) > 0$ donc f_1 est strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$.

c. Soit : $\begin{array}{ll} u'(x) = 1 & u(x) = x+1 \\ v(x) = \ln(1+x) & v'(x) = \dfrac{1}{x+1} \end{array}$

u et v sont continues et dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$, de même que u' et v' donc

$I_1 = [u(x)v(x)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$;

$I_1 = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{x+1}{x+1}\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)]_0^1 - \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 2\ln 2 - 0 - 1$;

$$I_1 = 2\ln 2 - 1.$$

$f_1(0) = 0$ et f_1 est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc f_1 est positive sur $[0\,;\,1]$.

f_1 est continue sur $[0\,;\,1]$ donc I_1 est l'aire (en unité d'aires) du domaine limité par l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = 0$,

$x = 1$ et la courbe représentative de f_1.

2. **a.** Pour tout entier naturel non nul n, f_n est la composée de deux fonctions continues sur $[0\,;\,+\infty[$:

$x \longmapsto 1 + x^n$ et $x \longmapsto \ln x$ donc f_n est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.

Pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x^n \leqslant 1$ donc $1 \leqslant 1 + x^n \leqslant 2$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $\ln 1 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant \ln 2$.

La fonction f_n est continue sur $[0\,;\,1]$ et pour tout x de $[0\,;\,1]$,

$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \ln 2$.

Donc pour tout entier naturel non nul n, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \ln 2\,\mathrm{d}x$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \ln 2$.

b. Pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ donc par produit par $x^n \geqslant 0$,

$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$ puis $1 \leqslant 1 + x^{n+1} \leqslant 1 + x^n$.

La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $\ln 1 \leqslant \ln\left(1+x^{n+1}\right) \leqslant \ln(1+x^n)$, soit $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$.

Les fonctions f_{n+1} et f_n sont continues sur $[0\,;\,1]$ et pour tout x de $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n$ donc $0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0.

c. La suite (I_n) décroissante et minorée par 0 est donc convergente vers un nombre positif.

3. **a.** g est la différence de deux fonctions continues dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$: $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto f_1(x)$ donc g est continue et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - 1 = \dfrac{-x}{x+1}$.

Pour tout $x > 0$, $g'(x) < 0$ et $g'(0) = 0$ donc g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. g est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ et $g(0) = 0$ donc g est strictement négative sur $[0\,;\,+\infty[$.

Si x est un réel positif alors pour tout entier naturel n non nul, x^n est un réel positif donc $g(x^n) \leqslant 0$ donc pour tout entier naturel n non nul, et pour tout x réel positif, on a : $\ln(1+x^n) - x^n \leqslant 0$ soit $\ln(1+x^n) \leqslant x^n$.

c. Les fonctions f_n et $x \longmapsto x^n$ sont continues sur $[0\,;\,+\infty[$ et pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$ on a : $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$; donc $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$, soit $0 \leqslant I_n \leqslant \left[\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$, ou encore $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'après le théorème des gendarmes appliqué aux suites, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Liban 2010 — 5 points

Partie A

ROC : On suppose connus les résultats : $e^0 = 1$ et pour tous réels x et y, $e^x \times e^y = e^{x+y}$.

1. Pour tout réel x, $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$ donc $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$.
2. Pour tout réel x, on démontre par récurrence la propriété $P(n) : (e^x)^n = e^{nx}$.
   - $(e^x)^0 = 1 = e^{0\times x}$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Soit n, un entier, on démontre que la propriété se transmet de n à $n+1$. On suppose que $(e^x)^n = e^{nx}$ alors $(e^x)^{n+1} = (e^x)^n \times e^x = e^{nx} \times e^x = e^{nx+x} = e^{(n+1)x}$.
   - La propriété est vraie pour $n = 0$ et se transmet, pour tout n, de n à $n+1$, donc la propriété est vraie pour tout n : pour tout entier naturel n, $(e^x)^n = e^{nx}$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx.$$

1. **a.** $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$

   Par linéarité de l'intégrale, $u_0 + u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1+e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 1\,dx = [x]_0^1 = 1$.

   b. $u_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$. On pose $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$, on remarque que $f = -\dfrac{u'}{u}$ où $u(x) = 1+e^{-x} > 0$.
   f a pour primitive $F = -\ln(u)$.
   $u_1 = [-\ln(1+e^{-x})]_0^1 = \ln(2) - \ln(1+e^{-1})$.
   D'après la question 1.a., $u_0 = 1 - u_1 = 1 - \ln(2) + \ln(1+e^{-1}) = \ln(e+1) - \ln(2)$
2. Pour tout entier naturel n, et pour tout réel x, $e^{-nx} > 0$ et $1+e^{-x} > 0$ donc $\dfrac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} > 0$. L'intégrale sur l'intervalle $[0 ; 1]$ d'une fonction positive est positive donc u_n est positive ou nulle.
3. **a.** Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+e^{-x}}\,dx + \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx$

   $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x} + e^{-nx}}{1+e^{-x}}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(e^{-x}+1)}{1+e^{-x}}\,dx$

   $u_{n+1} + u_n = \displaystyle\int_0^1 e^{-nx}\,dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-n}}{n}$

   b. Pour tout entier naturel n, d'après la question 2., $u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant 0$ or, d'après la question 3., $u_n = \dfrac{1-e^{-n}}{n} - u_{n+1}$ donc $u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.
4. Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1-e^{-n}}{n}$. Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$ (car e^{-n} tend vers 0 ainsi que $\dfrac{1}{n}$).
   Selon le théorème des gendarmes, la suite u_n converge aussi vers zéro.

Polynésie Juin 2010 — 7 points

L'annexe qui suit sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve

Partie A

1. **a.**
- La fonction $x \mapsto \ln(2x)$ est la composée des fonctions $x \mapsto 2x$ et $X \mapsto \ln(X)$ qui sont dérivables respectivement sur $[1\,;\,+\infty[$ et $\ln 2\,;\,+\infty[$.
  La fonction g somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et $g'(x) = \dfrac{2}{2x} - 1\dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$.
  Comme $x > 0$, cette dérivée est du signe du numérateur $1-x$.
  Donc $g'(x) = \iff x = 1$,
  $g'(x) < 0 \iff 1 < x$.
  Conclusion : la fonction g est décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
- D'autre part $g(1) = \ln 2 + 1 - 1 = \ln 2$.
  En écrivant $g(x) = 2x\left(\dfrac{\ln(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2}\right)$.
  On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x} = 0$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(2x)}{2x} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2}$ puis par produit de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
- La fonction g est donc dérivable donc continue sur $[1\,;\,+\infty[$ et décroissante de $\ln 2$ à moins l'infini : il existe donc un réel unique α tel que $g(\alpha) = 0$.

b. D'après la question précédente $g(\alpha) = 0 \iff \ln(2\alpha) + 1 - \alpha = 0 \iff \alpha = \ln(2\alpha) + 1$.

2. **a.** En allant « verticalement » vers la courbe (Γ) et « horizontalement » vers la droite d'équation $y = x$, on obtient quatre points de cette droite dont les abscisses sont $u_0,\ u_1,\ u_2,\ u_3$.
Voir la figure.

b. Par récurrence :
- Initialisation : comme $u_0 = 1$ et $u_1 = \ln(2) + 1 \approx 1,69 < 3$, on a bien :
$$1 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 3.$$
- Hérédité :
  Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$ (1).
  Donc $u_{n+2} = \ln(2u_{n+1}) + 1$.
  Or (1) implique par produit par 2 :
  $2 \leqslant 2u_n \leqslant 2u_{n+1} \leqslant 6$, puis
  $\ln 2 \leqslant \ln(2u_n) \leqslant \ln(2u_{n+1}) \leqslant \ln 6$ et enfin
  $1 + \ln 2 \leqslant \ln(2u_n) + 1 \leqslant \ln(2u_{n+1}) + 1 \leqslant \ln 6 + 1$ soit
  $1 + \ln 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant \ln 6 + 1$.
  Comme $1 + \ln 6 \approx 2,791 < 3$, on en déduit finalement que
  $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 3$.

On a donc démontré par récurrence que pour tout naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.

c. On vient de démontrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 3 : elle est donc convergente vers une limite $\ell \leqslant 3$.
Comme la fonction g est continue, la fonction définie par $g(x) + x$ l'est aussi et à la limite on a donc :
$\ell = \ln(\ell) + 1$. Or on a vu à la question 1. b. que α était la solution de cette équation.
Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$.

Partie B

1. **a.** La fonction f produit de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ est dérivable et par conséquent continue sur cet intervalle.
On sait alors que $F(x)$ est une primitive de f sur $[1\,;\,+\infty[$. On a donc $F'(x) = f(x)$.
Or sur $[1\,;\,+\infty[$, $x - 1 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{1-x} > 0$ quel que soit le réel x, donc par produit $f(x) \geqslant 0$.
La dérivée de F étant positive, la fonction F est croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. On pose : $\begin{cases} u(t) &= t-1 \\ v'(t) &= \mathrm{e}^{1-t} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(t) &= 1 \\ v(t) &= -\mathrm{e}^{1-t} \end{cases}$

Toutes les fonctions étant continues car dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$, on a par intégration par parties :

$F(x) = \left[-(t-1)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \int_1^x -\mathrm{e}^{1-t}\,\mathrm{d}t = \left[-(t-1)\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x - \left[\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x = \left[-t\mathrm{e}^{1-t}\right]_1^x$

$= -x\mathrm{e}^{1-x} - (1\mathrm{e}^0) = 1 - x\mathrm{e}^{1-x}$.

c. On a $F(x) = \dfrac{1}{2} \iff 1 - x\mathrm{e}^{1-x} = \dfrac{1}{2} \iff \dfrac{1}{2} = x\mathrm{e}^{1-x} \iff$

(les deux membres étant supérieur à zéro et par croissance de la fonction ln) $\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(x\mathrm{e}^{1-x}\right) \iff$

$-\ln 2 = \ln x + (1-x) \iff$

$\ln 2 + \ln x + 1 - x = 0 \iff \ln(2x) + 1 = x$.

2. On a vu que sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f(x) \geqslant 0$, donc l'aire de la partie $\mathcal{D}_a$ est égale à l'intégrale $F(a)$.

Résoudre $F(a) = \dfrac{1}{2}$ a été fait à la question précédente et sa solution est le nombre vérifiant $\ln(2x) + 1 = x$; or on a vu à la question 1. b. que ce nombre est le nombre α

Asie Juin 2010 — 4 points

PARTIE A

1. Étude des limites

a. • $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$,donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$;

• $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$,

donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

b. Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$.

Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$, donc par produit de limites $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

c. La première limite montre que l'axe des ordonnées est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de zéro.

La seconde montre que l'axe des abscisses est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de plus l'infini.

2. Étude des variations de la fonction f

a. $f(x)$ étant considéré comme un produit de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$f'(x) = \left(\dfrac{1}{x^2}\right)'\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)' = -\dfrac{2x}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\left(\dfrac{2x}{x^4} + \dfrac{1}{x^4}\right) =$

$-\dfrac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

b. On a $x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow 2x + 1 > 1 > 0$; d'autre part quel que soit $u \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^u > 0$. Enfin $x > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^4} > 0$, donc finalement pour tout réel supérieur à zéro,

$f'(x) < 0$.

Il en résulte que la fonction f est décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$ de plus l'infini à zéro d'après la première question.

c. D'après le résultat précédent (décroissance de f de plus l'infini à zéro sur $]0\ ;\ +\infty[$), la fonction f continue car dérivable sur cet intervalle il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne :

$f(1,1) \approx 2,05$ et $f(1,2) \approx 1,60$ donc $1,1 < \alpha < 1,2$;

$f(1,10) \approx 2,05$ et $f(1,11) \approx 1,99$ donc $1,10 < \alpha < 1,11$.

La valeur approchée au centième de α est donc $1,11$.

3. Voir plus bas

PARTIE B Étude d'une suite d'intégrales

1. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u(x) = \dfrac{1}{x}$ qui est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$.

La fonction à intégrer est donc de la forme $-u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$ qui est la dérivée de $-\mathrm{e}^{u(x)}$.

On a donc $I_2 = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}$.

2. Une relation de récurrence

a. $I_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

On pose $u'(x) = \dfrac{1}{x^n}$ et $v(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$; d'où

$u(x) = -\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$.

Toutes les fonctions sont dérivables, donc continues sur $]0\,;\,+\infty[$: on peut donc intégrer par parties :

$I_n = \left[-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 - \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n-1}}\times\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n-1}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{n}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) - \dfrac{1}{n-1}I_{n+1}$.

Puis $(n-1)I_n = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - I_{n+1} \iff I_{n+1} = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.

b. La relation de récurrence précédente permet de calculer :

$I_3 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} + (1-2)I_2 = \mathrm{e} - \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2^{2-1}} - \left(\mathrm{e} - \sqrt{\mathrm{e}}\right) = \dfrac{\sqrt{\mathrm{e}}}{2}$.

3. **a.** Soit x tel que :

$0 < 1 \leqslant x \leqslant 2$, donc en passant aux inverses : $0 < \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant 1$, puis par croissance de la fonction exponentielle :

$< \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}^{x}$, d'où en particulier

$0 < \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \mathrm{e}$.

Comme $x^n > 0$ pour tout naturel et tout réel x entre 1 et 2, il résulte que :

$0 \times \dfrac{1}{x^n} < \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\dfrac{1}{x^n} \leqslant \mathrm{e}\dfrac{1}{x^n}$. Ou encore

$0 \leqslant \dfrac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$.

b. On en déduit l'encadrement de l'intégrale I_n :

$$\int_1^2 0\,\mathrm{d}x < \int_1^2 \frac{1}{x^n}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x,$$

soit $0 < I_n \leqslant \mathrm{e}\left[-\dfrac{1}{n-1}\dfrac{1}{x^{n-1}}\right]_1^2$

soit finalement $0 < I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1 - \dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n-1} = 0$, on obtient par produit de limites :

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$.

D'après le théorème des « gendarmes » on a donc :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

Réunion Juin 2010 6 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.
On note D la droite d'équation $y = x$.

Partie A

1. **a.** Sens de variation de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} > 0 \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction f est donc croissante sur $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$

b. Limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1 + x = 0^+ \text{et } \lim_{x\to -1^+} \ln(1 + x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \ln(1 + x) = +\infty$$

Tableau de variations de f :

x	$-$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2. On désigne par g la fonction définie sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

a. $\lim_{x\to -1} g(x) = -\infty$:

$$\lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} 1 - x + \ln(1+x) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to -1^+} 1 + x = 0^+,\ \lim_{x\to -1^+} \ln(1+x) = -\infty \text{ et } \lim_{x\to -1} 1 - x = 2$$

b.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to +\infty} 1 + x = +\infty \text{ et } \lim_{X\to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} = \lim_{x\to +\infty} (1+x)\left(\frac{1-x}{1+x} + \frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) = -\infty \text{ car } \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to +\infty} \frac{1-x}{1+x} = -1$$

c. Sens de variation de la fonction g

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \text{ du signe de } -x \text{ sur }]-1\,;\,+\infty[$$

La fonction g est donc strictement croissante sur $]-1;0[$ et strictement décroissante sur $]0;\,+\infty[$.
Elle possède une tange,nte horizonate au point d'abscisse 0.
Tableau de variations de la fonction g :

x	$-$		α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	↗		$\{1$ ↘	$\{0$ ↘	$-\infty$

d. Sur l'intervalle $]-1\ ;\ 0[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement croissante. Elle réalise donc une bijection de $]-1\ ;\ 0[$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\ ;\ 1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté α dans $]-1\ ;\ 0[$.

Sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction g est continue, comme somme et composée de fonctions continues, et strictement décroissante. Elle réalise donc une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ sur $]-\infty\ ;\ 1[$. Or 0 appartient à l'ensemble d'arrivée $]-\infty\ ;\ 1[$. Donc, 0 possède un unique antécédent, noté β dans $]0\ ;\ +\infty[$.

De plus :

$$\begin{cases} g(2) \simeq 0{,}0986 > 0 \\ g(3) \simeq -0{,}614 < 0 \end{cases} \Longrightarrow 2 \leqslant \beta \leqslant 3$$

e. Signe de $g(x)$:
- $-1 < x \leqslant \alpha \Longrightarrow g(x) \leqslant g(\alpha) = 0$. (La fonction g est croissante sur $[-1;\alpha[$).
- $\alpha \leqslant x \leqslant 0 \Longrightarrow g(\alpha) = 0 \leqslant g(x)$. (La fonction g est croissante sur $[\alpha;0]$).
- $0 \leqslant x \leqslant \beta \Longrightarrow g(x) \geqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[0;\beta[$).
- $x \geqslant \beta \Longrightarrow g(x) \leqslant 0 = g(\beta)$. (La fonction g est décroissante sur $[\beta;+\infty[$).

x	-1		α		β		$+\infty$
$g(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	0	$-$	

Position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite D :
- $\mathscr{C}_f$ est située au dessus de la droite D pour $x \in]\alpha\,;\,\beta[$.
- $\mathscr{C}_f$ est située en dessous de la droite D pour $x \in]-1\,;\,\alpha[\cup]\beta\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$

1. Pour tout nombre entier naturel n, $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$. Démonstration par récurrence :
- On a $2 \leqslant u_0 = 2 \leqslant \beta$
- Supposons que, pour un n donné, on ait : $2 \leqslant u_n \leqslant \beta$, alors, la fonction f étant croissante sur $[2\,;\,\beta]$:

$$2 \leqslant u_n \leqslant \beta \Longrightarrow \boxed{2} \leqslant 2{,}09861228867 \simeq f(2) \leqslant f(u_n) = \boxed{u_{n+1}} \leqslant f(\beta) = \boxed{\beta}$$

- Ainsi, $\forall n,\ n \in \mathbb{N},\ 2 \leqslant u_n \leqslant \beta$.

2. La suite (u_n) est croissante (*en utilisant le signe de $g(x)$ étudié plus haut*) :

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = g(u_n) \geqslant 0 \text{ sur } [2\,;\,\beta]$$

Donc, (u_n) étant une suite croissante et majorée par β, elle est convergente.

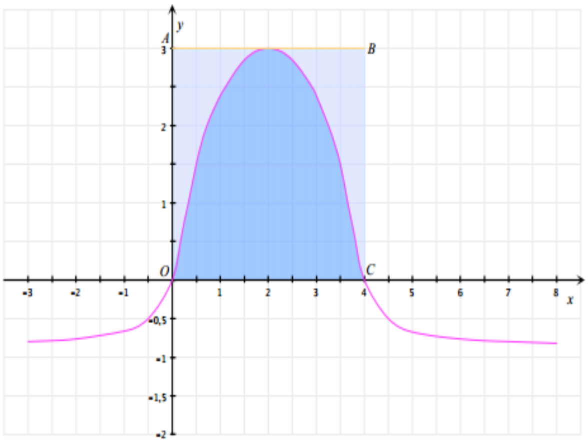
Antilles Guyane 2010 — 4 points

1. **a.** Calcul de $F(x) = \int_0^0 f(t)\mathrm{d}t = 0$

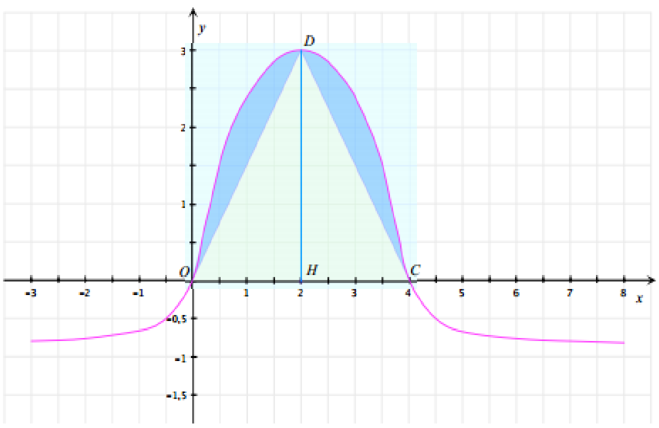
b. Soit $x \in [0\,;\,4]$.Sur l'intervalle $[0\,;\,x]$ la fonction f est positive donc comme $0 \leqslant x$, d'après le cours : $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$ c'est-à-dire $F(x) \geqslant 0$.

Soit $x \in [-3\,;\,0]$. Sur l'intervalle $[x\,;\,0]$ la fonction f est négative donc comme $x \leqslant 0$, d'après le cours : $\int_x^0 f(t)\mathrm{d}t \leqslant 0$ d'où $-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$
$c'est-à-dire$F(x)$\geqslant 0$.

c. Sur l'intervalle $[0\,;\,4]$, la fonction f est positive, l'intégral $\int_0^4 f(t)\mathrm{d}t$ représente donc l'aire de la portion du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites verticales d'équations respectives $x = 0$ et $x = 4$.
Par ailleurs, cette aire est inférieure à l'aire du rectangle OABC, autrement dit : $F(4) \leqslant OA \times AB$, c'est-à-dire : $F(4) \leqslant 12$.



De même, l'aire $F(4)$ est supérieure à celle du triangle ODC de hauteur $[DH]$ donc $F(4) \geqslant \frac{1}{2} \times DH \times OC$ c'est-à-dire $F(4) \geqslant 6$.

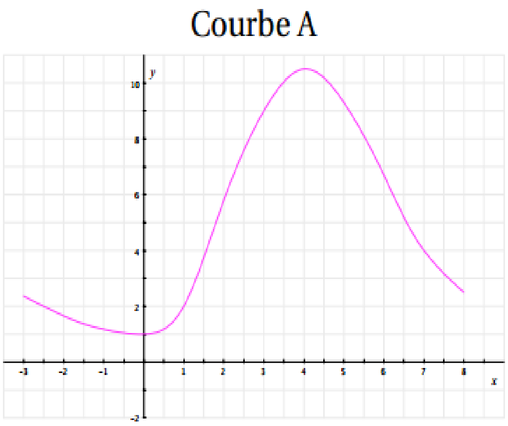


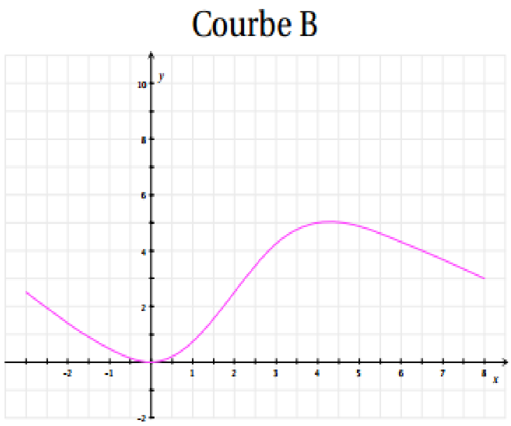
2. **a.** Soit $x \in I$. La fonction f est continue sur I ; donc $F :\mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ reprèsente la primitive de f sur I qui s'annule en 0.

b. D'après ce qui précéde, la fonction F est dérivable sur I et $F'(dx) = f(x)$.
Le signe de $f(x)$ s'obtient par lecture graphique. On peut donc dresser le tableau de variation de F :

x	-3		0		4		8
$F'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(x)$	$F(-3)$	$\searrow$	$\{0$	$\nearrow$	$\{F(4)$	$\searrow$	$\{F(8)$

3. On dispose de deux représentations graphiques sur I.





Les variations des courbes A et B sont en accord avec l tableau de variations précédent, cependant :
La courbe A ne peut représenter la fonction F puisqu ?on doit avoir $F(0)=0$ ce qui n ?est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.
La courbe B ne peut représenter la fonction F puisqu ?on doit avoir $6 \leqslant F(4) \leqslant 12$ ce qui n ?est pas le cas pour la fonction représentée sur cette courbe.

France Septembre 2010 — 6 points

Partie 1 : Étude de la fonction f

1. Comme x est supérieur à zéro, le signe de $f(x)$ est celui de $1-\ln x$.
Or $1-\ln x>0 \iff 1>\ln x \iff \ln \mathrm{e}>\ln x \iff \mathrm{e}>x$ par croissance de la fonction ln.
On a donc :

$f(x)>0 \iff 0<x<\mathrm{e}$;

$f(x)=0 \iff x=\mathrm{e}$;

$f(x)<0 \iff x>\mathrm{e}$.

2. • Au voisinage de zéro : $f(x)=x-x\ln x$.
On sait que $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x=0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.
• Au voisinage de plus l'infini :
On a $\lim\limits_{x\to +\infty} x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 1-\ln x=-\infty$. Par produit des limites on obtient : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.
Remarque : la lecture de l'annexe correspond bien à ces résultats.

3. f produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle et :
$f'(x)=1-\ln x+x\times\left(-\dfrac{1}{x}\right)=1-\ln x-1=-\ln x$.
Or $-\ln x>0 \iff \ln x<0 \iff \ln x<\ln 1 \iff x<1$ par croissance de la fonction ln.
De même $-\ln x>0 \iff x>1$.
Conclusion : la fonction est croissante sur $]0\,;\,1]$ et décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0		$-$		
$f(x)$	$\|\|$ {0	$\nearrow$	{1	$\searrow$	{0	$\searrow$	$-\infty$

4. **a.** On a $M(x\,;\,y) \in (T_a) \iff y - f(a) = f'(a)(x-a) \iff y - a + a\ln a = -\ln a(x-a) \iff y = -x\ln a + a$.

Le point d'intersection de la droite (T_a) et de l'axe des ordonnées a une abscisse nulle, d'où $y = a$, ordonnée du point A'.

Conclusion : $\mathrm{A}'(0\,;\,a)$.

b. Il suffit de tracer le quart de cercle centré en O de rayon a qui coupe l'axe des ordonnées au point $\mathrm{A}'(0\,;\,a)$

Du point $(a\,;\,0)$ donné sur la figure on trace la verticale qui coupe $\mathscr{C}$ au point $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$.

La tangente est la droite (AA'). Voir à la fin la figure.

Partie II : Un calcul d'aire

1. • On a vu à la question 1. que sur $]0\,;\,\mathrm{e}]$ la fonction f est positive. La mesure de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \mathrm{e}$ est donc égale à l'intégrale $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

• On a vu que sur $[\mathrm{e}\,;\,+\infty[$, $f(x) < 0$. Dans ce cas la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = a$ et $x = \mathrm{e}$ est donc égale à $-\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{\mathrm{e}} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}(a)$ en permutant les bornes d'intégration.

2. On a donc $\mathscr{A}(a) = \displaystyle\int_a^{\mathrm{e}} x(1-\ln x)\,\mathrm{d}x$.

Posons $\left\{\begin{array}{rcl} u'(x) &=& x\\ v(x) &=& 1-\ln x\end{array}\right.$ d'où $\left\{\begin{array}{rcl} u(x) &=& \dfrac{x^2}{2}\\ v'(x) &=& -\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$.

Toutes ces fonctions étant continues et dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, on peut donc intégrer par parties :

$$\mathscr{A}(a) = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_a^{\mathrm{e}} + \int_a^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}\times\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)\right]_a^{\mathrm{e}} + \int_a^{\mathrm{e}} \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x) + \frac{x^2}{4}\right]_a^{\mathrm{e}} = \left[\frac{x^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}-\ln x\right) + \frac{x^2}{4}\right]_a^{\mathrm{e}} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^2}{2}\left(\tfrac{3}{2}-1\right) - \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln a\right) = \frac{\mathrm{e}^2}{4} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{3}{2}-\ln a\right).$$

Amérique du Nord Nov 2010 — 5 points

Commun à tous les candidats

1. Pour tout réel x de $[0\,;1]$:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x[(\cancel{1}+x)-\cancel{1}]}{(1+x)^2} = \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}.$$

Comme $x \geqslant 0$ et que pour tout réel x, e^x est > 0, on a $f'(x) \geqslant 0$.

Donc f est croissante sur $[0\,;1]$.

2. **a.** On partage l'intervalle $[0\,;\,1]$ en cinq intervalles de même longueur $\frac{1}{5}$.
Si bien que :
$$[0\;;\;1]=\bigcup_{0\leqslant k\leqslant 4}\left[\frac{k}{5}\,;\frac{k+1}{5}\right].$$
Soit k un entier compris entre 0 et 4. La fonction f étant croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$, elle l'est en particulier sur l'intervalle $I_k=\left[\frac{k}{5}\,;\frac{k+1}{5}\right]$.
Donc pour tout x de I_k :
$$f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant f(x)\leqslant f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$
Il découle alors de l'inégalité de la moyenne que :
$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$
i.e. :
$$\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)$$
et ceci, quel que soit l'entier k compris entre 0 et 4.

Interprétation graphique : la fonction f étant continue et positive sur l'intervalle I_k, l'intégrale ci-dessus représente l'aire sous la courbe de la fonction f, exprimée en unité d'aire.
On en déduit que cette aire est comprise entre l'aire du rectangle r_K, situé au-dessous de la courbe, et celle du rectangle R_K, situé au-dessus de la courbe, ces rectangles ayant pour base $\frac{1}{5}$ et pour hauteurs respectives $f\left(\frac{k}{5}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{5}\right)$.

b. En sommant les inégalités précédentes pour k compris entre 0 et 4, on obtient :
$$\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)\leqslant\sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$
Or :

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k}{5}\right)=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f\left(\frac{k}{5}\right)=\frac{1}{5}S_4.$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x$ (Relation de Chasles).
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{4}\frac{1}{5}f\left(\frac{k+1}{5}\right)=\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}f\left(\frac{k+1}{5}\right)=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{5}f\left(\frac{k}{5}\right)=\frac{1}{5}(S_5-1).$

Il en résulte :
$$\frac{1}{5}S_4\leqslant\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{5}(S_5-1).$$

c. On trouve, à 10^{-4} près : $S_4\approx 5{,}4587$ et $S_5\approx 6{,}8178$.
D'où : $\frac{1}{5}(S_4)\approx 1{,}0917$ qu'on **minore** par 1,091
et $\frac{1}{5}(S_5-1)\approx 1{,}1636$ qu'on **majore** par 1,164.

Ce qui nous donne l'encadrement : $1{,}091\leqslant\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x\leqslant 1{,}164.$

3. **a.** Pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a :

$$1-x+\frac{x^2}{1+x}=\frac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x}=\frac{(1-\cancel{x^2})+\cancel{x^2}}{1+x}=\frac{1}{1+x}.$$

Donc, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$, on a : $\dfrac{1}{1+x}=1-x+\dfrac{x^2}{1+x}$.

b. En multipliant par e^x dans l'égalité précédente, on obtient, pour tout réel x de $[0\,;\,1]$:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}=(1-x)\mathrm{e}^x+\frac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}.$$

D'où, en intégrant de 0 à 1 :

$$\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x+I.$$

c. Pour calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$, les fonctions sous le signe somme étant continues, ainsi que leurs dérivées, on peut effectuer une intégration par parties. Posons :

$$\left|\begin{array}{l}u'(x)=\mathrm{e}^x\\ v(x)=1-x\end{array}\right.\qquad\left|\begin{array}{l}u(x)=\mathrm{e}^x\\ v'(x)=-1\end{array}\right.$$
$$u(x)v'(x)=-\mathrm{e}^x$$

D'où :

$$\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\left[(1-x)\mathrm{e}^x\right]_0^1+\left[\mathrm{e}^x\right]_0^1=$$

$[(1-x)\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^x]_0^1=[(2-x)\mathrm{e}^x]_0^1=\mathrm{e}-2$.

Ainsi :

$$\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}-2.$$

d. Puisque $I=\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x-\int_0^1(1-x)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\,\mathrm{d}x-(\mathrm{e}-2)$,

On déduit de l'encadrement obtenu au **2.c** que :

$$1,091-(\mathrm{e}-2)\leqslant I\leqslant 1,164-(\mathrm{e}-2).$$

D'où l'encadrement d'amplitude strictement inférieure à 10^{-1} suivant :

$$0,37\leqslant I\leqslant 0,45.$$

Nouvelle Calédonie Nov 2010 — 7 points

Commun à tous les candidats

PARTIE A : restitution organisée de connaissances

PARTIE B :

1. **a.** f somme de fonctions dérivables sur $[1\,;\,+\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$\varphi'(x)=2x-4x\ln x-2x^2\times\dfrac{1}{x}=2x-4x\ln x-2x=-4x\ln x$.

Comme $x\geqslant 1\Rightarrow\ln x\geqslant 0$, il en résulte que sur $[1\,;\,+\infty[$, $\varphi'(x)\leqslant 0$: φ est donc décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

b. $\varphi(\mathrm{e}) = 1 + \mathrm{e}^2 - 2\mathrm{e}^2 \times \ln \mathrm{e} = 1 - \mathrm{e}^2 \approx -6,4$.

D'autre part $\varphi(1) = 1 + 1 - 2 \times 0 = 2$.

La fonction est décroissante sur $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, $\varphi(\mathrm{e}) < 0$ et $\varphi(1) > 0$, donc la fonction φ continue car dérivable s'annule une seule fois en $\alpha \in [0\ ;\ 1]$.

La calculatrice donne :

$\varphi(1,8) \approx 0,4$; $\varphi(1,9) \approx -0,02$, donc :

$$1,8 < \alpha < 1,9.$$

c. La variation de φ montre que :

- sur $[1\ ;\ \alpha[$, $\varphi(x) > 0$;
- $\varphi(\alpha) = 0$;
- sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $\varphi(x) < 0$.

2. a. Le dénominateur ne peut s'annuler, donc f quotient de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$ est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times \left(1 + x^2\right) - 2x \ln x}{\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x\left(1 + x^2\right)^2} = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1 + x^2\right)^2}$.

b. De la question 1. c. on déduit que :

- sur $[1\ ;\ \mathrm{e}[$, $f'(x) > 0$: la fonction est croissante sur cet intervalle ;
- $f'(\alpha) = 0$;
- sur $]\alpha\ ;\ +\infty[$, $f'(x) < 0$: la fonction est décroissante sur cet intervalle.

c. On a $x^2 < x^2 + 1 \iff \dfrac{1}{1 + x^2} < \dfrac{1}{x^2}$ et en multipliant par $\ln x \geqslant 0$, car $x \geqslant 1$, on obtient :

$\dfrac{\ln x}{1 + x^2} \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, soit $f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$.

De plus sur $[1\ ;\ +\infty[$, $\ln x \geqslant 0$ et $1 + x^2 > 1 > 0$, donc $f(x) \geqslant 0$.

Finalement : pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes l'encadrement précédent montre que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

3. a. Posons :

$\left\{\begin{array}{lclcl} u(x) & = & \ln x & u'(x) & = & \dfrac{1}{x} \\ v'(x) & = & \dfrac{1}{x^2} & v(x) & = & -\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$.

Toutes ces fonctions étant continues car dérivables sur l'intervalle $[1\ ;\ \mathrm{e}]$, on peut intégrer par parties :

$\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\ln x \times \frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^{\mathrm{e}} = -\frac{\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}} - \frac{1}{\mathrm{e}} - \left(\frac{\ln 1}{1} - \frac{1}{1}\right) = 1 - \frac{2}{\mathrm{e}}$.

b. Puisque l'unité d'aire est égale à 1 cm^2, on sait que l'intégrale précédente est égale à $\mathscr{A}$.

On a vu que $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{\ln x}{x^2}$, donc d'après la restitution organisée de connaissances de la partie A, on a

$0 \leqslant \mathscr{A} \leqslant 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}}$ (soit à peu près $0 < \mathscr{A} \leqslant 0,265$.