L'intégrale de septembre 2010 à Avril 2012 : Probabilités

mise à jours le 23 avril 2012

Table des matières

1 Nouvelle Calédonie Mars 2012

Commun à tous les candidats **4 points**

On dispose de deux urnes et d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
L'urne U_1 contient trois boules rouges et une boule noire.
L'urne U_2 contient trois boules rouges et deux boules noires.
Une partie se déroule de la façon suivante : le joueur lance le dé ; si le résultat est 1, il tire au hasard une boule dans l'urne U_1, sinon il tire au hasard une boule dans l'urne U_2.
On considère les évènements suivants :
A : « obtenir 1 en lançant le dé »
B : « obtenir une boule noire ».

1. **a.** Construire un arbre pondéré traduisant cette expérience aléatoire.
   b. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule noire est $\frac{3}{8}$.
   c. Sachant que l'on a tiré une boule noire, calculer la probabilité d'avoir obtenu 1 en lançant le dé.
2. On convient qu'une partie est gagnée lorsque la ·boule obtenue est noire. Une personne joue dix parties indépendantes en remettant, après chaque partie, la boule obtenue dans l'urne d'où elle provient. On note X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   a. Calculer la probabilité de gagner exactement trois parties. On donnera le résultat arrondi au millième.
   b. Calculer la probabilité de gagner au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.
   c. On donne le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9

Soit N un entier compris entre 1 et 10. On considère l'évènement : « la personne gagne au moins N parties ».
À partir de quelle valeur de N la probabilité de cet évènement est-elle inférieure à $\frac{1}{10}$?

2 Pondichery Avril 2012

Commun à tous les candidats **6 points**

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un groupe de 50 coureurs, portant des dossards numérotés de 1 à 50, participe à une course cycliste qui comprend 10 étapes, et au cours de laquelle aucun abandon n'est constaté.
À la fin de chaque étape, un groupe de 5 coureurs est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage. Ces désignations de 5 coureurs à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes. Un même coureur peut donc être contrôlé à l'issue de plusieurs étapes.

1. À l'issue de chaque étape, combien peut-on former de groupes différents de 5 coureurs ?
2. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel :
   - « rand(1, 50) » permet d'obtenir un nombre entier aléatoire appartenant à l'intervalle [1 ; 50]
   - l'écriture « $x := y$ » désigne l'affectation d'une valeur y à une variable x.

Variables	a, b, c, d, e sont des variables du type entier
Initialisation	$a := 0$; $b := 0$; $c := 0$; $d := 0$; $e := 0$
Traitement	Tant que $(a = b)$ ou $(a = c)$ ou $(a = d)$ ou $(a = e)$ ou $(b = c)$ ou $(b = d)$ ou $(b = e)$ ou $(c = d)$ ou $(c = e)$ ou $(d = e)$
	Début du tant que
	$a :=$ rand(1, 50) ; $b :=$ rand(1, 50) ;
	$c :=$ rand(1, 50) ; $d :=$ rand(1, 50) ;
	$e :=$ rand(1, 50)
	Fin du tant que
Sortie	Afficher a, b, c, d, e

a. Parmi les ensembles de nombres suivants, lesquels ont pu être obtenus avec cet algorithme :
$L_1 = \{2 ; 11 ; 44 ; 2 ; 15\}; L_2 = \{8, 17, 41, 34, 6\}$;
$L_3 = \{12, 17, 23, 17, 50\}; L_4 = \{45, 19, 43, 21, 18\}$?

b. Que permet de réaliser cet algorithme concernant la course cycliste ?

3. À l'issue d'une étape, on choisit au hasard un coureur parmi les 50 participants. Établir que la probabilité pour qu'il subisse le contrôle prévu pour cette étape est égale à $0,1$.

4. On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par un coureur sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ? Préciser ses paramètres.

b. On choisit au hasard un coureur à l'arrivée de la course. Calculer, sous forme décimale arrondie au dix-millième, les probabilités des évènements suivants :

- il a été contrôlé 5 fois exactement ;
- il n'a pas été contrôlé ;
- il a été contrôlé au moins une fois.

Partie B

Dans cette partie, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.

Pour un coureur choisi au hasard dans l'ensemble des 50 coureurs, on appelle T l'évènement : « le contrôle est positif », et d'après des statistiques, on admet que $P(T) = 0,05$.

On appelle D l'évènement : « le coureur est dopé ».

Le contrôle anti-dopage n'étant pas fiable à 100 %, on sait que :

- si un coureur est dopé, le contrôle est positif dans 97 % des cas ;
- si un coureur n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1 % des cas.

1. Calculer $P(D)$.

2. Un coureur a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ?

3 Polynésie Septembre 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

Les 300 personnes travaillant dans un immeuble de bureaux de trois niveaux ont répondu aux deux questions suivantes :

- « À quel niveau est votre bureau ? »
- « Empruntez-vous l'ascenseur ou l'escalier pour vous y rendre ? »

Voici les réponses :

- 225 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 50 vont au 1$^{\text{er}}$ niveau, 75 vont au 2$^{\text{e}}$ niveau et 100 vont au 3$^{\text{e}}$ niveau.
- Les autres personnes utilisent l'escalier et, parmi celles-ci, un tiers va au 2$^{\text{e}}$ niveau, les autres vont au 1$^{\text{er}}$ niveau.

On choisit au hasard une personne de cette population.

On pourra considérer les évènements suivants :

- N_1 : « La personne va au premier niveau. »
- N_2 : « La personne va au deuxième niveau. »
- N_3 : « La personne va au troisième niveau. »
- E : « La personne emprunte l'escalier. »

1. Traduire l'énoncé à l'aide d'un arbre pondéré.

2. **a.** Montrer que la probabilité que la personne aille au 2$^{\text{e}}$ niveau par l'escalier est égale à $\dfrac{1}{12}$.

b. Montrer que les évènements N_1, N_2 et N_3 sont équiprobables.

c. Déterminer la probabilité que la personne emprunte l'escalier sachant qu'elle va au 2$^{\text{e}}$ niveau.

3. On interroge désormais 20 personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.

On appelle X la variable aléatoire qui, aux 20 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2$^{\text{e}}$ niveau.

a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

b. Déterminer, à 10^{-4} près, la probabilité que 5 personnes exactement aillent au 2^{e} niveau.

c. En moyenne sur les 20 personnes, combien vont au 2^{e} niveau ?

4. Soit n un entier inférieur ou égal à 300. On interroge désormais n personnes de cette population. On suppose que leurs réponses sont indépendantes les unes des autres.
Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un personne va au 2^{e} niveau »soit supérieure ou égale à $0,99$.

4 France 2011

Commun à tous les candidats **4 points**

Les deux parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4}.
Dans un pays, il y a 2 % de la population contaminée par un virus.

PARTIE A

On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– La probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est de $0,99$ (sensibilité du test).
– La probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est de $0,97$ (spécificité du test).

On fait passer un test à une personne choisie au hasard dans cette population.
On note V l'évènement « la personne est contaminée par le virus » et T l'évènement « le test est positif ».
$\overline{V}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de V et T.

1. a. Préciser les valeurs des probabilités $P(V)$, $P_V(T)$, $P_{\overline{V}}(\overline{T})$.
Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $V \cap T$.

2. Démontrer que la probabilité que le test soit positif est 0,049 2.

3. a. Justifier par un calcul la phrase :
« Si le test est positif, il n'y a qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée ».

b. Déterminer la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif.

PARTIE B

On choisit successivement 10 personnes de la population au hasard, on considère que les tirages sont indépendants.
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées par le virus parmi ces 10 personnes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.

2. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les 10.

5 Réunion 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

Les trois questions peuvent être traitées de façon indépendante

Un candidat participe à un jeu télévisé qui comporte deux épreuves. La première consiste à répondre à une question tirée au hasard parmi celles que l'assistante a prélevées dans une urne.
Dans la seconde, il doit répondre à une série de 10 questions sur un thème qu'il choisit.

1. L'urne contient dix bulletins indiscernables au toucher comportant chacun une question.
Toutes les questions sont différentes, quatre portent sur l'histoire, quatre portent sur la littérature et deux sur le sport.
En début d'émission, l'assistante tire au hasard et simultanément 4 bulletins de l'urne.
On note A l'évènement « les quatre questions portent sur l'histoire » et B l'évènement « l'une au moins des quatre questions porte sur le sport ».
Déterminer la probabilité des évènements A et B.

2. L'animateur annonce les thèmes sur lesquels portent les questions des quatre bulletins choisis par l'assistante. Il y a une question d'histoire, deux de littérature et une sur le sport.

   Le candidat tire au hasard l'un de ces quatre bulletins.

   On admet que la probabilité que sa réponse soit correcte est $0,7$ s'il s'agit d'une question d'histoire, $0,6$ s'il s'agit d'une question de littérature et $0,5$ pour une question sur le sport.

   On considère les évènements suivants :

   H : « la question posée au candidat porte sur l'histoire »
   L : « la question posée au candidat porte sur la littérature »
   S : « la question posée au candidat porte sur le sport »
   C : « le candidat répond correctement à la question posée »

   a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à cette première épreuve.

   b. Calculer la probabilité de l'évènement C.

   c. Sachant que le candidat a répondu correctement, quelle est la probabilité que la question posée ait porté sur le sport ?

3. Le candidat a réussi cette première épreuve et choisit l'histoire comme thème pour la seconde épreuve. Les dix questions qu'on lui pose sont indépendantes et on suppose toujours que la probabilité qu'il réponde correctement à chaque question est égale à $0,7$.

   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de bonnes réponses données par le candidat.

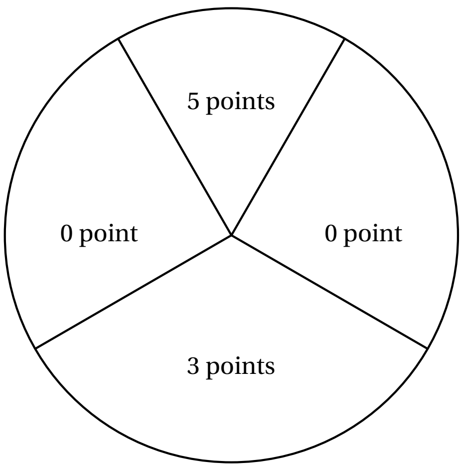
   a. Soit k un entier compris entre 0 et 10.
   Quelle est l'expression de la probabilité de l'évènement $\{X = k\}$ en fonction de k ? On justifiera la réponse.

   b. Déterminer la probabilité que le candidat donne au moins neuf bonnes réponses. On arrondira le résultat à 10^{-2}.

6 Pondichery 2011

Commun à tous les candidats **5 points**
Commun à tous les candidats

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1. Le joueur lance une fléchette.

   On note p_0 la probabilité d'obtenir 0 point.

   On note p_3 la probabilité d'obtenir 3 points.

   On note p_5 la probabilité d'obtenir 5 points.

   On a donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1$. Sachant que $p_5 = \frac{1}{2}p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3}p_0$ déterminer les valeurs de p_0, p_3 et p_5.

2. Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les 3 lancers) supérieur ou égal à 8 points. Si au bout de 2 lancers, il a un total supérieur ou égal à 8 points, il ne lance pas la troisième fléchette.

   On note G_2 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 2 lancers ».

   On note G_3 l'évènement : « le joueur gagne la partie en 3 lancers ».

   On note P l'évènement : « le joueur perd la partie ».

   On note $p(A)$ la probabilité d'un évènement A.

   a. Montrer, en utilisant un arbre pondéré, que $p\left(G_2\right) = \dfrac{5}{36}$.

   On admettra dans la suite que $p\left(G_3\right) = \dfrac{7}{36}$

   b. En déduire $p(P)$.

3. Un joueur joue six parties avec les règles données à la question 2.

   Quelle est la probabilité qu'il gagne au moins une partie ?

4. Pour une partie, la mise est fixée à 2 €.

   Si le joueur gagne en deux lancers, il reçoit 5 €. S'il gagne en trois lancers, il reçoit 3 €. S'il perd, il ne reçoit rien.

   On note X la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur pour une partie. Les valeurs possibles pour X sont donc : -2, 1 et 3.

   a. Donner la loi de probabilité de X.

   b. Déterminer l'espérance mathématique de X. Le jeu est-il favorable au joueur ?

7 Nouvelle-Calédonie 2011

Commun à tous les candidats **4 points**

Chaque année, deux villages A et B organisent un concours sportif. Les concurrents tirent au sort un moyen de transport puis doivent relier le village A au village B le plus rapidement possible en utilisant ce moyen de transport et un parcours adapté. Pour le tirage, on utilise une urne contenant 4 jetons indiscernables au toucher. Sur un premier jeton figure la lettre V , sur le second la lettre R, sur le troisième la lettre P et sur le dernier la lettre L.

Un concurrent tire au hasard un jeton :
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre V, il effectuera le trajet à vélo,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre R, Il effectuera le trajet en roller,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre P, il effectuera le trajet à pied,
- s'il tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisira librement son mode de transport parmi les trois précédents.

On observe que lorsqu'un concurrent tire le jeton sur lequel figure la lettre L, il choisit le vélo dans 70 % des cas, il choisit le roller dans 20 % des cas el il décide de faire le parcours à pied dans 10 % des cas.

1. Construire un arbre pondéré correspondant à la situation.

   Pour les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis au millième.

2. Calculer la probabilité qu'un concurrent effectue le trajet à vélo.

3. Sachant qu'un concurrent a effectué le trajet à vélo, quelle est la probabilité qu'il ait tiré le jeton sur lequel figure la lettre L ?

4. On admet que les résultats des différentes années sont indépendants les uns des autres.

   L'expérience des années précédentes permet de considérer que la probabilité, pour le vainqueur, d'avoir effectué le trajet à vélo est $\dfrac{2}{3}$.

   Calculer la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste ».

8 Nouvelle-Calédonie Novembre 2010

Commun à tous les candidats **4 points**

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.
   a. Vérifier que $P(X=0)=\dfrac{3}{10}$ puis déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.
   c. Calculer la probabilité de l'évènement suivant :
   A : « les deux boules tirées sont de même couleur ».
2. On effectue deux tirages successifs d'une boule en respectant la règle suivante :
   si la boule tirée est rouge, on la remet dans l'urne ; si elle est verte, on ne la remet pas.

   a. En utilisant un arbre pondéré, calculer la probabilité des évènements suivants :

   B : « seule la première boule tirée est verte »,

   C : « une seule des deux boules tirées est verte ».

   b. Sachant que l'on a tiré exactement une boule verte, quelle est la probabilité que cette boule verte soit la première tirée ?

9 France 2009

Commun à tous les candidats **5 points**

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\dbinom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a : $\dbinom{n}{p}=\dbinom{n-1}{p-1}+\dbinom{n-1}{p}$.

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. **a.** On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.
   b. On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
   Calculer la probabilité de B.
   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

Polynésie 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives.
On admet que :

- la probabilité qu'il gagne la première partie est de $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul :

- G_n l'évènement « le joueur gagne la n-ième partie » ;
- p_n la probabilité de l'évènement G_n.

On a donc $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \dfrac{1}{5}p_n + \dfrac{3}{5}$.
5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul,
   $p_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.
6. Déterminer la limite de la suite (p_n) quand n tend vers $+\infty$.
7. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on : $\dfrac{3}{4} - p_n < 10^{-7}$?