L'intégrale de septembre 2010 à Avril 2012 : Probabilités

mise à jours le 23 avril 2012

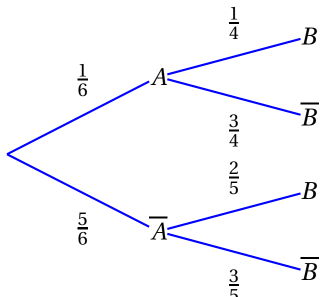
Table des matières

1 Nouvelle Calédonie Mars 2012 2
2 Pondichery Avril 2012 2
3 Polynésie Septembre 2011 3
4 France 2011 4
5 Réunion 2011 5
6 Pondichery 2011 6
7 Nouvelle-Calédonie 2011 7
8 Nouvelle-Calédonie Novembre 2010 8
9 France 2009 8
10 Polynésie 2011 9

1 Nouvelle Calédonie Mars 2012

Commun à tous les candidats **4 points**

1. **a.**



b. D'après la loi des probabilités totales : $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p\left(\overline{A}\right) \times p_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375$.

c. $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}$.

2. **a.** Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{3}{8}$.

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :

$p(\mathrm{X} = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-3} = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^7 \approx 0,2357 \approx 0,236$ au millième près.

b. On a $p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \binom{10}{3} \times \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0,9909 \approx 0,991$ au millième près.

c. À partir du tableau donné on calcule les probabilités $P(\mathrm{X} = k-1)$ par différence entre deux valeurs consécutives. On constate que $P(\mathrm{X} = 7)$ est la première valeur inférieure à 0,1. Donc $N = 7$.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(\mathrm{X} < k)$	0,009 1	0,063 7	0,211 0	0,446 7	0,694 3	0,872 5	0,961 6	0,992 2	0,999 0	0,999 9
$P(\mathrm{X} = k-1)$	0,009 1	0,054 6	0,147 3	0,235 7	0,247 6	0,178 2	0,089 1	0,030 6	0,006 8	0,000 9

2 Pondichery Avril 2012

Commun à tous les candidats **6 points**

Partie A

1. Il y a $\binom{50}{5} = \frac{50!}{5! \times (50-5)!} = 2\,118\,760$ groupes différents de 5 coureurs.

2. **a.** L_1 et L_3 n'ont pu être obtenus avec cet algorithme puisqu'ils contiennent des éléments identiques. Les deux autres oui.

b. Cet algorithme permet chaque jour de tirer au sort 5 coureurs pour subir un contrôle antidopage.

3. Un joueur étant choisi, on peut lui adjoindre $\binom{49}{4}$ groupes de 4 coureurs différents sur les 49 restants.

La probabilité pour qu'un coureur choisi au hasard subisse le contrôle prévu pour cette étape est donc égale à $\frac{\binom{49}{4}}{\binom{50}{5}} = \frac{49!}{4! \times 45!} \times \frac{5! \times 45!}{50!} = \frac{5}{50} = \frac{1}{10} = 0,1$.

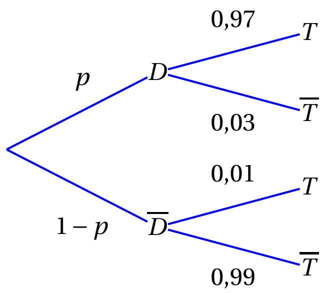
4. **a.** Les tirages de groupes de 5 sont chaque jour indépendants les uns des autres et la probabilité d'être choisi pour un des 50 coureurs est égale à 0,1 : la loi X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,1$.

b. – On a $p(X = 5) = \binom{10}{5} \times 0,1^5 \times (1 - 0,1)^{10-5} = 252 \times 0,1^5 \times 0,9^5 \approx 0,00148$ soit environ 0,001 5

- $p(X=0) = 0,1^0 \times 0,9^{10} \approx 0{,}3487$.
- On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - 0,9^{10} \approx 6513$.

Partie B

1. En notant $p(D) = p$, on peut construire l'arbre suivant :



D'après la loi des probabilités totales :

$p(T) = p_D(T) \times p(D) + p_{\overline{D}}(T) \times p\left(\overline{D}\right)$ ou encore

$0,05 = 0,97p + 0,01(1-p) \iff 0,05 = 0,97p + 0,01 - 0,01p \iff$

$0,96p = 0,04 \iff p = \dfrac{4}{96} = \dfrac{1}{24}$. (un peu plus de 2 coureurs sur 50)

2. Il faut calculer $p_T\left(\overline{D}\right) = \dfrac{p\left(T \cap \overline{D}\right)}{p(T)} = \dfrac{0,01\left(1 - \frac{1}{24}\right)}{0,05} = \dfrac{1}{5} \times \dfrac{23}{24} = \dfrac{23}{120} \approx 0,19$.

3 Polynésie Septembre 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

1. Sur 300 personnes, 225 utilisent l'escalier ; $p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{225}{300} = \dfrac{3}{4}$. D'où

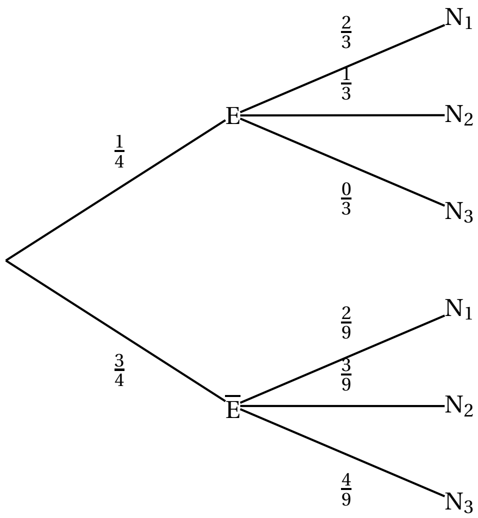
$p(\mathrm{E}) = 1 - p\left(\overline{\mathrm{E}}\right) = \dfrac{1}{4}$.

Sur les 225 personnes empruntant l'ascenseur la répartition 50, 75, 100 suivant les étages conduit à :

$$p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_1) = \frac{50}{225} = \frac{2}{9}, \quad p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_2) = \frac{75}{225} = \frac{3}{9}, \quad p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_3) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}$$

Sur les 75 personnes empruntant l'escalier, on obtient de même :

$$p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_1) = \frac{1}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_2) = \frac{2}{3}, \quad p_{\mathrm{E}}(\mathrm{N}_3) = \frac{0}{3}$$



2. **a.** On a $p\,(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2) = p(\mathrm{E}) \times p_{\overline{\mathrm{E}}}(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{12}$.

b. Vont au 1^er^ étage : 50 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{2}{3} = 50 = 100$ personnes ;

Vont au 2^e^ étage : 75 (ascenseur) + $75 \times \dfrac{1}{3} = 25 = 100$ personnes ;

Vont au 3^e^ étage : 100 (ascenseur) personnes.

Les évènements N_1, N_2, N_3 sont bien équiprobables.

c. Il faut trouver : $p_{\mathrm{N}_2}(\mathrm{E}) = \dfrac{p\,(\mathrm{E} \cap \mathrm{N}_2)}{p\,(\mathrm{N}_2)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{4}$.

3. **a.** Une personne prise au hasard a une probabilité d'aller au 2^e^ étage égale à $p\,(\mathrm{N}_2) = \dfrac{1}{3}$.

Les réponses des 20 étant indépendantes les unes des autres, la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $p = \dfrac{1}{3}$ et $n = 20$.

b. On a donc :

$$p(X = 5) = \binom{20}{5} \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{20-5} = 15\,504 \times \frac{2^{15}}{3^{20}} \approx 0{,}1457.$$

c. La moyenne pour les 20 personnes d'aller au 2^e^ étage est égale à l'espérance mathématique de la variable aléatoire X, soit : $\mathrm{E}(X) = n \times p = 20 \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{20}{3} \approx 7$.

Un peu moins de 7 personnes sur 20 vont au 2^e^ étage.

4. On reprend la variable aléatoire suivant la loi binomiale de probabilité $\dfrac{1}{3}$ avec n personnes.

Il faut trouver : $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0)$ soit $p(X \geqslant 1) = 1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.

La condition est réalisée si :

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geqslant 0{,}99 \iff 0{,}01 \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \iff \ln 0{,}01 \geqslant n \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\text{(par croissance de la fonction ln)} \iff \frac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \leqslant n$$

Or $\dfrac{\ln 0{,}01}{\ln \frac{2}{3}} \approx 11{,}3$. Il faut donc prendre au minimum 12.

Conclusion : sur 12 personnes, au moins une va au niveau 2 avec une probabilité supérieure ou égale à 0,99.

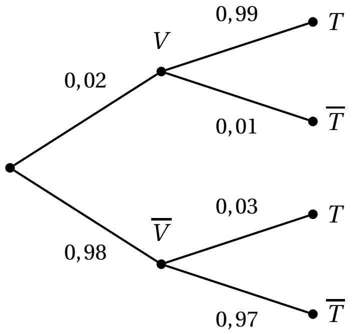
4 France 2011

Commun à tous les candidats **4 points**

PARTIE A

1. **a.** D'après l'énoncé, on a : $P(V)0{,}02$; $P_V(T) = 0{,}99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T}) = 0{,}97$.

Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



b. $P(V \cap T) = P_V(T) \times P(V) = 0,99 \times 0,02 = 0{,}0198$

2. Par conséquent : $P(V) = P(V \cap T) + P\left(V \cap \overline{T}\right) = P_T(V) \times p(T) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
Alors : $P(T) = 0,99 \times 0,02 + 0,03 \times 0,98 = 0,0492$.

3. **a.** Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V) = \dfrac{P(V \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}0198}{0{,}0492} \approx 0,402$, soit environ 40%.
Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.

b. La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{V} \cap \overline{T}\right)}{P(\overline{T})} = \dfrac{0,97 \times 0,98}{1 - 0{,}0492} \approx 0{,}9997$, c'est-à-dire environ 99,97%.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\ ;\ 0,02)$.

2. Pour tout k, $(0 \leqslant k \leqslant 10)$, on a $P(X = k) = \binom{10}{k} \times 0,02^k \times (1 - 0,02)^{10-k}$.
Alors : $P(X \geqslant 2) = 1 - (P(X < 2)) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] = 1 - \left[0,98^{10} + 10 \times 0,02 \times 0,98^9\right] \approx 0,016$

5 Réunion 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

1. Les bulletins sont indiscernables au toucher, les tirages sont donc équiprobables et la probabilité d'un événement est le quotient du nombre de tirages qui lui sont favorables par le nombre de tirages possibles :

- Le nombre de tirages de 4 bulletins choisis simultanément parmi 10 est

$$\binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210$$

- L'événement A est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 4 portant sur l'histoire ;
le nombre de tirages favorables à l'événement A est

$$\binom{4}{4} = 1$$

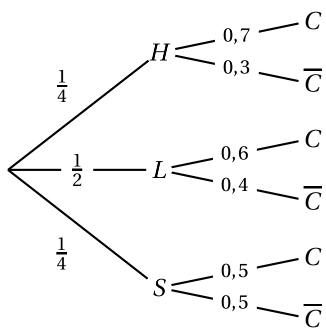
- L'événement $\overline{B}$ est réalisé lorsque les 4 bulletins sont choisis parmi les 8 ne portant pas sur le sport ;
le nombre de tirages favorables à l'événement $\overline{B}$ est

$$\binom{8}{4} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 70$$

Ainsi :

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{210}} \quad \text{et} \quad \boxed{P(B) = 1 - P\left(\overline{B}\right) = 1 - \frac{70}{210} = \frac{2}{3}}$$

2. [**a.**]



b. Les événements H, L et S forment un système complet d'événements, alors (formule des probabilités totales) :

$$\begin{array}{rclclcl} P(C) & = & P(C\cap H) & + & P(C\cap L) & + & P(C\cap S) \\ P(C) & = & P(H)\times P_H(C) & + & P(L)\times P_L(C) & + & P(S)\times P_S(C) \\ P(C) & = & \frac{1}{4}\times 0,7 & + & \frac{1}{2}\times 0,6 & + & \frac{1}{4}\times 0,5 \end{array}$$

$$\boxed{P(C) = 0,6}$$

c. On demande de calculer la probabilité conditionnelle $P_C(S)$:

$$\boxed{P_C(S) = \frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{P(S)\times P_S(C)}{P(C)} = \frac{0,5\times 0,25}{0,6} = \frac{5}{24}}$$

3. [**a.**]

Chaque question constitue une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,7$ (épreuve à deux issues : le candidat répond correctement à la question — succès — avec la probabilité $p = 0,7$ ou bien il ne répond pas correctement à la question avec la probabilité $1-p = 0,3$).

On répète $n = 10$ fois, de manière indépendante, une telle épreuve de même paramètre $p = 0,7$, alors la variable aléatoire X égale au nombre de « succès » suit la loi binomiale de paramètres 10 et $0,7$, c'est-à-dire

a. $\boxed{\textbf{pour tout } k \in \{0;1;2;\ldots;10\},\quad P(\{X=k\}) = \binom{10}{k}\times 0,7^k\times 0,3^{10-k}}$

b. $P(\{X \geqslant 9\}) = P(\{X=9\}) + P(\{X=10\})$

$P(\{X \geqslant 9\}) = \binom{10}{9}\times 0,7^9\times 0,3 + \binom{10}{10}\times 0,7^{10} = \ldots$

$$\boxed{P(\{X\geqslant 9\}) \approx 0,15 \textbf{ à } 10^{-2} \textbf{ près}}$$

6 Pondichery 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

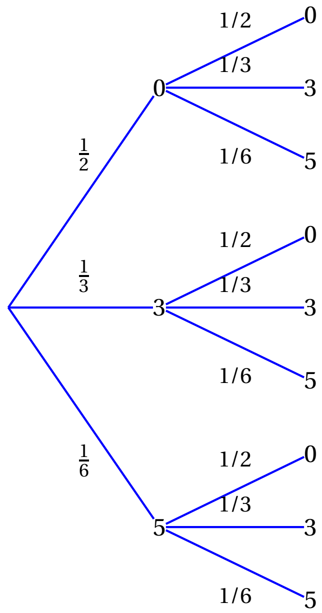
1. On a donc $p_3 = 2p_5$ et $p_0 = 3p_5$, donc $p_0 + p_3 + p_5 = 1 \iff 3p_5 + 2p_5 + p_5 = 1 \iff 6p_5 = 1 \iff p_5 = \frac{1}{6}$.

Il en résulte que $p_3 = 2p_5 = 2\times\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ et $p_0 = 3p_5 = 3\times p_0 = 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

Remarque : il ne devait pas être très difficile de voir que les probabilités étaient proportionnelles à l'aire des secteurs, donc à des angles au centre de 180 ° (deux angles droits), un angle de 60 ° et un angle de 120 ° pour un total de 360 °.

On a donc $p_0 = \frac{180}{360} = \frac{1}{2}$, $p_3 = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$ et $p_5 = \frac{60}{360} = \frac{1}{6}\ldots$

2. a.



On obtient un total d'au moins 8 points en deux lancers à la 6^e, 8^e et 9^e branche. Donc $p\left(G_2\right)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{36}=\dfrac{5}{36}$.

b. En déduire $p(P)$. On a $p(P)=1-p\left(G_2\right)-p\left(G_3\right)=1-\dfrac{5}{36}-\dfrac{7}{36}=\dfrac{36}{36}-\dfrac{12}{36}=\dfrac{24}{36}=\dfrac{2}{3}$.

3. Les lancers sont indépendants ; on a une schéma de Bernoulli de paramètres $n=6$ et de probabilité $p=\dfrac{2}{3}$.

La probabilité de ne gagner aucune partie est $\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$, donc la probabilité de gagner au moins une partie est $1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^6=\dfrac{3^6-2^6}{3^6}=\dfrac{665}{729}$

4. a. On a le tableau de loi de probabilité de X suivant :

X	-2	1	3
$p(X=x_i)$	$\dfrac{24}{36}$	$\dfrac{7}{36}$	$\dfrac{5}{36}$

b. $\mathrm{E}(X)=-2\times\dfrac{24}{36}+1\times\dfrac{7}{36}+3\times\dfrac{5}{36}=\dfrac{-48+7+15}{36}=-\dfrac{26}{36}=-\dfrac{13}{18}\approx-0,72$ €.

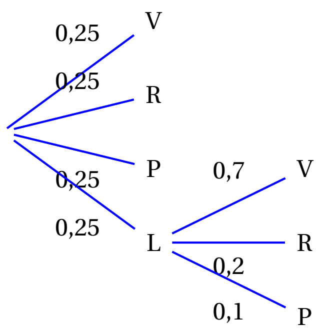
Un joueur perd en moyenne sur un grand nombre de parties 72 centimes par partie.

Le jeu est défavorable au joueur.

7 Nouvelle-Calédonie 2011

Commun à tous les candidats **4 points**

1.



2. On a $p(\mathrm{V})=0,25+0,25\times0,7=0,25\times1,7=0,425$.

3. On a $p_{\mathrm{V}}(\mathrm{L})=\dfrac{p(\mathrm{V}\cap\mathrm{L})}{p(\mathrm{V})}=\dfrac{0,25\times0,7}{0,425}=\dfrac{0,175}{0,425}=\dfrac{7}{17}\approx0,412$.

4. On a un schéma de Bernoulli de paramètres $n=6$ et $p=\dfrac{2}{3}$.

La probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée 0 fois par un concurrent « non cycliste » est égale à $\binom{6}{6}\left(\dfrac{2}{3}\right)^6\times\left(1-\dfrac{2}{3}\right)^0=\left(\dfrac{2}{3}\right)^6$.

Donc la probabilité qu'au cours des six prochaines années l'épreuve soit remportée au moins une fois par un concurrent « non cycliste »est égale à :

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^6=\frac{3^6-2^6}{3^6}=\frac{665}{729}\approx0,912.$$

8 Nouvelle-Calédonie Novembre 2010

Commun à tous les candidats **4 points**

Les questions 1. et 2. sont indépendantes

1. **a.** Le tirage étant simultané le nombre de tirages est celui de 2 boules parmi 5, soit $\binom{5}{2}$.
Le nombre de cas favorables est, les boules vertes étant retirées, égal au nombre de combinaisons de 2 boules rouges choisies parmi 3.
On a donc $p(X=0)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{3}{10}=0,3$.

b. On a de même $p(X=1)=\dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{2\times 3}{10}=\dfrac{6}{10}$

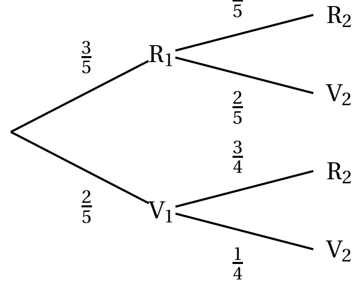
Enfin $p(X=2)=\dfrac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\dfrac{1}{10}$.

On a donc $\mathrm{E}=0\times\dfrac{3}{10}+1\times\dfrac{6}{10}+2\times\dfrac{1}{10}=\dfrac{8}{10}=\dfrac{4}{5}=0,8$.

c. Si les deux boules sont rouges $X=0$ et si les deux boules sont vertes $X=2$.
Donc $p(\mathrm{A})=p(X=0)+p(X=2)=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$.

2. **a.**
On a $p(\mathrm{B})=p(\mathrm{V}_1)\times p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{R}_2)=\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{10}$.

$p(\mathrm{C})=p(\mathrm{R}_1)\times p_{\mathrm{R}_1}(\mathrm{V}_2)+p(\mathrm{V}_1)\times p_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{R}_2)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{5}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{6}{25}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{27}{50}=\dfrac{54}{100}=0,54$.



b. Il faut calculer :
$p_{\mathrm{C}}(\mathrm{V}_1)=\dfrac{p(\mathrm{C}\cap\mathrm{V}_1)}{p(\mathrm{C})}=\dfrac{\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}}{\frac{27}{50}}=\dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{27}{50}}=\dfrac{3}{10}\times\dfrac{50}{27}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$.

9 France 2009

Commun à tous les candidats **5 points**

I. $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\dfrac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!}+\frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}=\dfrac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}=\dfrac{(n-1)!(p+n-p)}{p!(n-p)!}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}$ $\square$

II.1.a. Les jetons sont indiscernables au toucher donc on peut légitimement supposer qu'on se trouve dans une situation d'équiprobabilité. Il y a $\binom{10}{2}$ manières de choisir 2 jetons parmi 10 et il y a $\binom{7}{2}$ manières de choisir 2 jetons blancs parmi les 7 jetons blancs. Donc

$$p(A)=\frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$$

II.1.b. De même, 6 jetons portent des numéros impairs donc $p(B)=\dfrac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{1}{3}$.

II.1.c. De même, 4 jetons blancs portent des numéros impairs donc $p(A\cap B)=\dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{2}{15}$. Ainsi, $p(A)\times p(B)=\dfrac{7}{15}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{7}{45}$ alors que $p(A\cap B)=\dfrac{2}{15}=\dfrac{6}{45}$ donc $p(A)\times p(B)\neq p(A\cap B)$ donc $\boxed{\text{les évènements } A \text{ et } B \text{ ne sont pas indépendants}}$.

II.2.a. La variable aléatoire X peut valoir 0, 1 ou 2.

$p(X=0)=\dfrac{\binom{7}{0}\times\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{1}{15}$,

$p(X=1)=\dfrac{\binom{7}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{7}{15}$,

$p(X=2)=\dfrac{\binom{7}{2}\times\binom{3}{0}}{\binom{10}{2}}=\dfrac{7}{15}$. D'où :

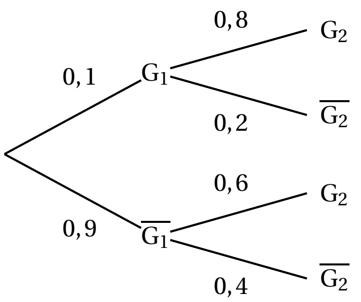
k	0	1	2
$p(X=k)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$

II.2.b. $E(X)=0\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{7}{15}+2\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{7}{5}$: $\boxed{E(X)=\dfrac{7}{5}}$

10 Polynésie 2011

Commun à tous les candidats **5 points**

1. On a l'arbre pondéré suivant :

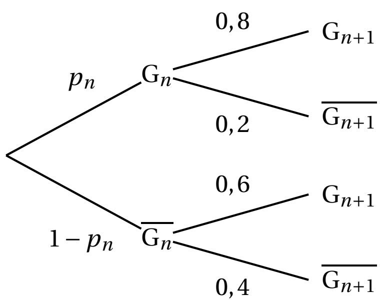


2. On a $p_2=p(G_1\cap G_2)+p\left(\overline{G_1}\cap G_2\right)=p(G_1)\times p_{G_1}(G_2)+p\left(\overline{G_1}\right)\times p_{\overline{(G_1)}}(G_2)=$ $0,1\times 0,8+0,9\times 0,6=0,08+0,54=0,62$.

3. Il faut trouver $p_{G_2}\left(\overline{G_1}\right)=\dfrac{p\left(\overline{G_1}\cap G_2\right)}{p(G_2)}=\dfrac{0,54}{0,62}=\dfrac{27}{31}$.

4. La probabilité que le joueur ne gagne aucune des trois parties est égale à $0,9\times 0,4\times 0,4=0,144$.
La probabilité qu'il gagne au moins une partie est donc égale à
$1-0,144=0,856$.

5. À la partie n, on a l'arbre suivant :



On a donc $p_{n+1}=p(G_n\cap G_{n+1})+p\left(\overline{G_n}\cap G_{n+1}\right)=p(G_n)\times p_{G_n}(G_{n+1})+p\left(\overline{G_n}\right)\times p_{\overline{G_n}}(G_{n+1})=p_n\times 0,8+\left(1-p_n\right)\times 0,6=$ $0,8p_n+0,6-0,6p_n=0,2p_n+0,6=\dfrac{1}{5}p_n+\dfrac{3}{5}$.

6. *Initialisation* On a bien $\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^1=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{20}=\dfrac{15-13}{20}=\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}=0,1=p_1$.

Hérédité

Supposons qu'il existe $a\in\mathbb{N}$, $a>1$ tel que $p_a=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a$.

D'après la formule démontrée à la question 4 :

$p_{a+1}=\dfrac{1}{5}p_a+\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{5}\left[\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^a\right]+\dfrac{3}{5}=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{5}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}=\dfrac{3}{20}+\dfrac{12}{20}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^{a+1}$. La propriété est vraie au rang $a+1$.

On a donc démontré par récurrence que pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$.

7. Comme $-1<\dfrac{1}{5}<1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{3}{4}=0,75$.

8. On a : $\dfrac{3}{4}-p_n<10^{-7}\iff\dfrac{3}{4}-\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n\right)<10^{-7}\iff\dfrac{13}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n<10^{-7}\iff\left(\dfrac{1}{5}\right)^n<\dfrac{4}{13}\times10^{-7}\iff$ (par croissance de la fonction logarithme népérien) $n\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)<\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)\iff n>\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}$.

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{4\times10^{-7}}{13}\right)}{\ln\left(\dfrac{1}{5}\right)}\approx10,7$.

Donc u_{11} approche la limite $\dfrac{3}{4}$ à moins de 10^{-7}.